



Anhang A

Lösungen zu den Übungsbeispielen

**A**

---

# A

<b>A.5</b>	Eindimensionale Stabprobleme .....	<b>5</b>
<b>A.5.1</b>	Stabbeispiel I .....	<b>5</b>
<b>A.5.2</b>	Stabbeispiel II .....	<b>6</b>
<b>A.5.3</b>	Stabbeispiel III .....	<b>11</b>
<b>A.5.4</b>	Stabbeispiel IV .....	<b>13</b>
<b>A.5.5</b>	Stabbeispiel V .....	<b>14</b>
<b>A.5</b>	Zweidimensionale Stabprobleme .....	<b>19</b>
<b>A.5.6</b>	Stabbeispiel VI .....	<b>19</b>
<b>A.5.7</b>	Stabbeispiel VII .....	<b>23</b>
<b>A.5.8</b>	Stabbeispiel VIII .....	<b>26</b>
<b>A.5.9</b>	Stabbeispiel IX .....	<b>28</b>
<b>A.5.10</b>	Stabbeispiel X .....	<b>31</b>
<b>A.5.11</b>	Stabbeispiel XI .....	<b>35</b>
<b>A.5.12</b>	Stabbeispiel XII .....	<b>37</b>
<b>A.5.13</b>	Stabbeispiel XIII (FEM_GEN und FEM_CAS) .....	<b>40</b>
<b>A.6</b>	Eindimensionale Balkenprobleme .....	<b>43</b>
<b>A.6.1</b>	Balkenbeispiel I .....	<b>43</b>
<b>A.6.2</b>	Balkenbeispiel II .....	<b>45</b>
<b>A.6.3</b>	Balkenbeispiel III .....	<b>50</b>
<b>A.6.4</b>	Balkenbeispiel IV .....	<b>55</b>
<b>A.6.5</b>	Balkenbeispiel V .....	<b>58</b>
<b>A.6.6</b>	Balkenbeispiel VI .....	<b>61</b>
<b>A.6.7</b>	Balkenbeispiel VII .....	<b>65</b>
<b>A.6.8</b>	Balkenbeispiel VIII .....	<b>66</b>
<b>A.6.9</b>	Balkenbeispiel IX .....	<b>72</b>
<b>A.6.10</b>	Balkenbeispiel X .....	<b>75</b>
<b>A.6.11</b>	Balkenbeispiel XI .....	<b>78</b>
<b>A.6.12</b>	Balkenbeispiel XII .....	<b>79</b>
<b>A.6</b>	Zweidimensionale Balkenprobleme .....	<b>85</b>
<b>A.6.13</b>	Balkenbeispiel XIII .....	<b>85</b>
<b>A.6.14</b>	Balkenbeispiel XIV .....	<b>88</b>
<b>A.6.15</b>	Balkenbeispiel XV .....	<b>92</b>
<b>A.6.16</b>	Balkenbeispiel XVI .....	<b>96</b>
<b>A.7</b>	Scheibenprobleme .....	<b>99</b>
<b>A.7.1</b>	Scheibenproblem I .....	<b>99</b>
<b>A.7.2</b>	Scheibenproblem II .....	<b>101</b>
<b>A.7.3</b>	Scheibenproblem III .....	<b>103</b>
<b>A.7.4</b>	Scheibenproblem IV .....	<b>106</b>
<b>A.8</b>	Platten- und Schalenprobleme .....	<b>111</b>
<b>A.8.1</b>	Vergleich der Platten nach DKT und Specht .....	<b>111</b>

<b>A.8.2</b>	Beispiel zu einem Schalenproblem .....	112
<b>A.9</b>	Volumenprobleme .....	119
<b>A.9.1</b>	Beispiel zu einem Volumenproblem .....	119
<b>A.10</b>	Übungsbeispiele zur Stab- und Balkenschwingung .....	121
<b>A.10.1</b>	Übungsbeispiel zur Stabschwingung .....	121
<b>A.10.2</b>	Übungsbeispiel zur Balkenschwingung .....	124
<b>A.11</b>	Knicken von eindimensionalen Stäben und Balken .....	129
<b>A.11.1</b>	Knickbeispiel I (Stab) .....	129
<b>A.11.2</b>	Knickbeispiel II (Balken) .....	135
<b>A.11.3</b>	Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement) .....	139
<b>A.12</b>	Beispiele zu Feldproblemen .....	147
<b>A.12.1</b>	Wärmeübertragungsbeispiel I .....	147
<b>A.12.2</b>	Wärmeübertragungsbeispiel II .....	149
<b>A.12.3</b>	Wärmeübertragungsbeispiel III .....	153
<b>A.12.4</b>	Wärmeübertragungsbeispiel IV .....	159
<b>A.12.5</b>	Wärmeübertragungsbeispiel V .....	169
<b>A.12.6</b>	Wärmeübertragungsbeispiel VI .....	173
<b>A.12.7</b>	Wärmeübertragungsbeispiel VII .....	177
<b>A.12.8</b>	Wärmeübergangsbeispiel VIII .....	180
<b>A.12.9</b>	Wärmeübertragungsbeispiel IX .....	185
<b>A.12.10</b>	Wärmeübertragungsbeispiel X .....	190
<b>A.12.11</b>	Wärmeübertragungsbeispiel XI .....	194
<b>A.12.12</b>	Hydrostatisches Lager als Beispiel zur Strömungsanalogie .....	197
<b>A.13</b>	Torsionsbeispiele .....	203
<b>A.13.1</b>	Torsion eines Rohres mit Längsbohrungen .....	203
<b>A.13.2</b>	Torsion eines Winkels bzw. Temperaturverlauf in einem Winkel .....	204

# A

—

|

|

—

—

|

|

—

# A Lösungen zu den Übungsbeispielen

## A.5 Eindimensionale Stabprobleme

A.5

### ➤ A.5.1 Stabbeispiel I

116

#### ⊗ Einteilung in Elemente

Das Stabsystem wird in zwei Elemente aufgeteilt. Dem Knoten 1 wird eine Verschiebung  $\bar{u}$  aufgeprägt, während die Verschiebung von Knoten 3 Null ist.

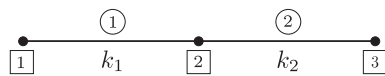


Bild A.1. Elementeinteilung des Stabes

#### ⊗ Steifigkeitsmatrizen

Die Steifigkeitsmatrizen der beiden Elemente stellen sich dar als:

$$\underline{K}_1 = k_1 \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u_1 \quad ; \quad \underline{K}_2 = k_2 \begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} u_2 \quad (1084)$$

#### ⊗ Gesamtsteifigkeitsmatrix und Verschiebungen

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix wird durch Überlagerung der beiden Einzelsteifigkeitsmatrizen gewonnen. Die Anteile von Matrix 1 (Matrix 2) sind durch  $\lfloor \rfloor$  ( $\lceil \rceil$ ) gekennzeichnet.

$$\underline{K}_g = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \lfloor k_1 \rfloor & \lfloor -k_1 \rfloor & 0 \\ \lfloor -k_1 \rfloor & \lfloor k_1 \rfloor + \lceil k_2 \rceil & \lceil -k_2 \rceil \\ 0 & \lceil -k_2 \rceil & \lceil k_2 \rceil \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (1085)$$

Die Verschiebungen an den drei Knoten werden über die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  mit den äußeren Kräften des Systems in Beziehung gesetzt. Diese stellt die Gleichgewichtsbeziehung des Systems dar:

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u} \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R F_1 \\ F \\ {}^R F_3 \end{bmatrix} \quad (1086)$$

In voranstehender Beziehung sind die bekannten Verschiebungen, nämlich  $u_1 = \bar{u}$  und  $u_3 = 0$ , schon eingesetzt worden. Als Unbekannte treten neben der Verschiebung  $u_2$  noch die Reaktionskräfte  ${}^R F_1$  und  ${}^R F_3$  auf. Aus der zweiten Zeile von (1086) erhält man:

$$-k_1 \bar{u} + (k_1 + k_2) u_2 = F \Rightarrow u_2 = \frac{F + k_1 \bar{u}}{k_1 + k_2} \quad (1087)$$

Damit sind alle Knotenverschiebungen bekannt.

⊙ **Auflagerkräfte**

Die erste Zeile aus (1086) führt auf die Kraft im linken Lager:

$${}^R F_1 = k_1 \bar{u} - k_1 u_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \bar{u} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} F \quad (1088)$$

Entsprechend die letzte Zeile aus (1086) auf die Kraft im rechten Auflager:

$${}^R F_3 = -k_2 u_2 = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \bar{u} - \frac{k_2}{k_1 + k_2} F \quad (1089)$$

⊙ **Steifigkeit  $k_2$**

Es wird verlangt, daß  ${}^R F_1$  verschwindet. Aus (1088) erhält man:

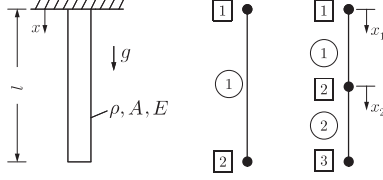
$$\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \bar{u} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} F = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{F}{\bar{u}} \quad (1090)$$

Die Reaktionskraft im linken Auflager verschwindet also, wenn die Steifigkeit des Stabes 2 zu  $F/\bar{u}$  angenommen wird oder wenn die Belastung  $F$  als  $\bar{u} k_2$  aufgeprägt wird.

⊙ **A.5.2 Stabbeispiel II**

Es wird die Vorschrift abgeleitet, die eine Umrechnung der Volumenkraft  $\rho g V$  in die Knotenkräfte ermöglicht. Damit werden die Verformungen und die Spannungen im Stab, der im Bild A.2 dargestellt ist, berechnet. Mit Hilfe des Programmes „FEM\_CAS“ werden diese Größen für 4 und 8 Elemente

ermittelt. Der Fehler in den Maximalspannungen wird in einem doppelt logarithmischen System dargestellt.



**Bild A.2.** Einteilung des Stabes unter Eigengewicht in ein bzw. zwei zweiknotige Stabelemente

② **Knotenkräfte für das zweiknotige Element**

Das Funktional des Stabes nach (255) auf der S. 98 wird um den Term  $-\int_V \rho g u dV$  erweitert. Er beschreibt die Volumenkräfte des Stabes, dabei ist  $\rho$  die Dichte und  $g$  eine translatorische Beschleunigung. Dieser Integralausdruck wird mit Hilfe der Formfunktion  $\vec{N}$  nach (258) diskretisiert:

$$\int_V \rho g u dV = \int_V \rho g \vec{u}^T \vec{N} dV = \vec{u}^T \underbrace{\int_V \rho g \vec{N} dV}_{\vec{F}_g} \quad (1091)$$

Der Vektor  $\vec{F}_g$  enthält die beiden Knotenkräfte, die aus der Volumenkraft des Stabelementes hervorgehen:

$$\vec{F}_g = \int_V \rho g \vec{N} dV = A \rho g \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{x}{l} \\ 1 - \frac{x}{l} \end{bmatrix} dx = A \rho g \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \end{bmatrix} \quad (1092)$$

In der voranstehenden Beziehung wird vorausgesetzt, daß die Querschnittsfläche  $A$ , die Dichte  $\rho$  und die Beschleunigung  $g$  im Element konstant sind. Das Ergebnis zeigt, daß die Gesamtkraft im Element  $A l \rho g$  je zur Hälfte auf die Knoten aufgeteilt wird.

② **Verformungen und Auflagerreaktion für ein zweiknotiges Element**

Für ein Element, wie in Bild A.2 dargestellt, ergibt sich folgende Beziehung:

$$\frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A \rho g \frac{l}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^R F_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1093)$$

Mit  $u_1=0$  erhält man aus der zweiten Zeile aus (1093):

$$u_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho g l^2}{E}; \quad \bar{u}_2 = u_2 \frac{E}{\rho g l^2} = \frac{1}{2} \quad (1094)$$

Die Auflagerreaktion am Knoten 1 ergibt sich aus der ersten Zeile zu:

$${}^R F_1 = -\frac{AE}{l} u_2 - A \rho g \frac{l}{2} = -\frac{AE}{l} \frac{\rho g l^2}{2E} - A \rho g \frac{l}{2} = -A \rho g l \quad (1095)$$

⊗ **Maximalspannungen für ein zweiknotiges Element**

Mit Hilfe der Formfunktion nach (258) und des Hooke'schen Gesetzes  $\sigma = E du/dx$  läßt sich die Spannung im Stab berechnen als:

$$\sigma = E \frac{du}{dx} = E \frac{d}{dx} \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) u_i + \frac{x}{l} u_j \right] = E \left( -\frac{1}{l} u_i + \frac{1}{l} u_j \right) = E \frac{u_j - u_i}{l} \quad (1096)$$

Durch Einsetzen der Knotenverformungen nach (1094) erhält man die Spannung im Element. Sie ist im ganzen Element konstant:

$$\sigma = \frac{E}{l} u_2 = E \frac{1}{l} \frac{\rho g l^2}{2E} = \frac{1}{2} \rho g l \quad ; \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\rho g l} = \frac{1}{2} \quad (1097)$$

Die exakte Spannung nach (254) auf der S. 98  $\sigma_{ex} = \rho g(l-x)$  ist über die Stablänge linear verteilt. Das Maximum  $\bar{\sigma} = 1$  tritt bei  $x = 0$  auf. Somit liegt ein Fehler<sup>1</sup> von 50 % vor.

In Bild A.3 ist dieser Fehler für eine unterschiedliche Elementanzahl in einem doppelt logarithmischen System dargestellt. Die Elementanzahl ist beginnend mit einem Element sukzessive auf zwei, vier und acht Elemente erhöht worden. Der Fehler nimmt dann auf 25 %, 12,5 %, und 6,25 % ab. Daraus ergibt sich im doppelt logarithmischen System eine Fehlergerade.

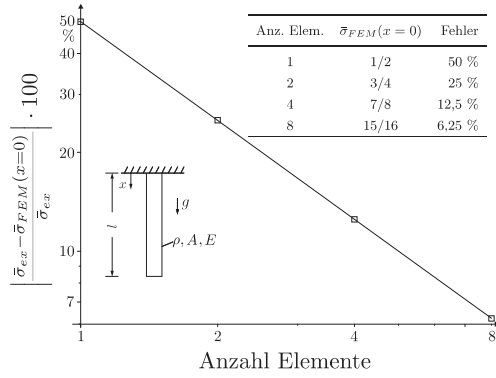
⊗ **Zwei zweiknotige Elemente**

Der Stab wird, wie in der rechten Hälfte von Bild A.2 auf der S. 7 dargestellt, in zwei zweiknotige Elemente eingeteilt. Daraus ergeben sich folgende Elementsteifigkeitsmatrizen:

---

<sup>1</sup>Der Fehler ist definiert als:  $|(\sigma_{ex} - \sigma_{FEM})/\sigma_{ex}| \cdot 100$ .





**Bild A.3.** Die Fehlergerade stellt sich dar als:  $E = 50n^{-1}$ , wobei  $n$  die Anzahl Elemente ist. Will man einen Fehler von 1 % erzielen, so sind dafür 50 Elemente notwendig

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = \frac{2AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1098)$$

Für die Knotenkräfte der Elemente gilt nach (1092):

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = A \rho g \frac{l}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1099)$$

Der Gesamtbelastungsvektor  $\vec{F}_g = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  wird wie folgt gebildet:

$$\vec{F}_g = A \rho g \frac{l}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + A \rho g \frac{l}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = A \rho g \frac{l}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1100)$$

Mit Hilfe der Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Verschiebungen:

$$\frac{2AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = A \rho g \frac{l}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{F1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1101)$$

Bedingt durch die Einspannung am Knoten 1 ist die Verschiebung  $u_1 = 0$  bekannt. Es kann daher die erste Zeile und Spalte aus dem voranstehenden

Gleichungssystem gestrichen werden. Zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungen  $u_2$  und  $u_3$  ergibt sich:

$$\frac{2AE}{l} \left[ \begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \right] = A \rho g \frac{l}{4} \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} 2 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \right] = \frac{1}{8} \frac{\rho g l^2}{E} \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] \quad (1102)$$

Das voranstehende Gleichungssystem  $\hat{K}_g \vec{u} = \vec{F}_g$  läßt sich durch Inversion von  $\hat{K}_g$  lösen als:  $\vec{u} = \hat{K}_g^{-1} \vec{F}_g$

$$\left[ \begin{array}{c} u_2 \\ u_3 \end{array} \right] = \frac{1}{2-1} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right] \frac{1}{8} \frac{\rho g l^2}{E} \left[ \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array} \right] = \frac{1}{8} \frac{\rho g l^2}{E} \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right]$$

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{array} \right] = \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right] \quad (1103)$$

Aus den Knotenverschiebungen nach (1103) lassen sich mit Hilfe der Formfunktionen des Elementes nach (258) auf der S. 100 die Verschiebungen  $^i u$  im Element  $i$  beschreiben. Für Element 1 ergibt sich mit  $x_1 = x$  und  $l_1 = l/2$ :

$$^1 u = \vec{N}^T {}^1 \vec{u} = \left[ 1 - \frac{x_1}{l_1} \mid \frac{x_1}{l_1} \right] \frac{1}{8} \frac{\rho g l^2}{E} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array} \right]$$

$$= \frac{3}{8} \frac{\rho g l^2}{E} \frac{x_1}{l_1} = \frac{3}{4} \frac{\rho g l^2}{E} \frac{x}{l} \quad \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (1104)$$

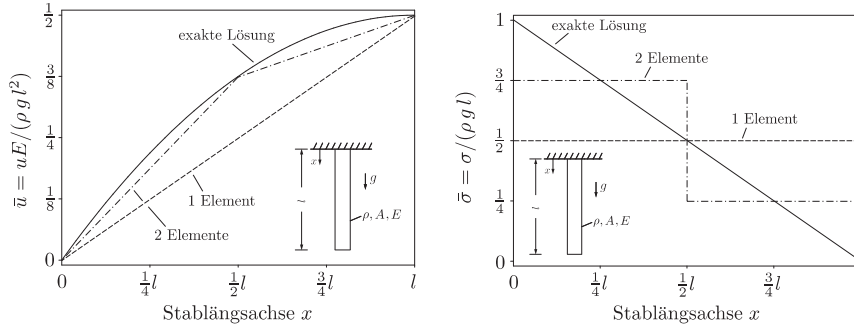
Analog für Element 2 mit  $x_2 = x - l_1$  und  $l_2 = l/2$ :

$$^2 u = \vec{N}^T {}^2 \vec{u} = \left[ 1 - \frac{x_2}{l_2} \mid \frac{x_2}{l_2} \right] \frac{1}{8} \frac{\rho g l^2}{E} \left[ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{8} \frac{\rho g l^2}{E} \left( 3 + \frac{x_2}{l_2} \right) = \frac{1}{4} \frac{\rho g l^2}{E} \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \quad \text{für } \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (1105)$$

In Bild (A.4) sind die normierten Verschiebungen über der Stablänge für die exakte Lösung nach (253) auf der S. 98 und die für ein sowie zwei Stabele-

mente angeführt. Die analytische Lösung zeigt einen degressiven Verlauf über die Stablänge. Die FE-Lösung weist an den Knoten keinen Fehler auf, weicht aber im Element von der exakten Lösung ab, da im Element die Verschiebung linear verteilt ist.



**Bild A.4.** Vergleich der Verschiebungen und Spannungen zwischen der exakten und der FE-Lösung

Die Spannungen werden ebenfalls elementweise berechnet. Aus den Verschiebungen nach (1104) bzw. (1105) werden die Dehnungen  $\varepsilon = du/dx$  ermittelt. Mit dem Hooke'schen Gesetz  $\sigma = \varepsilon E$  gewinnt man die Spannungen des Elementes  $i$ . Für Element 1 erhält man:

$${}^1\varepsilon = \frac{d}{dx} \left( \frac{3}{4} \frac{\rho g l^2}{E} \frac{x}{l} \right) = \frac{3}{4} \frac{\rho g l}{E} \Rightarrow {}^1\sigma = \frac{3}{4} \rho g l; \quad {}^1\bar{\sigma} = \frac{{}^1\sigma}{\rho g l} = \frac{3}{4} \quad (1106)$$

Analog für Element 2:

$${}^2\varepsilon = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{4} \frac{\rho g l^2}{E} \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \right) = \frac{1}{4} \frac{\rho g l}{E} \Rightarrow {}^2\sigma = \frac{1}{4} \rho g l; \quad {}^2\bar{\sigma} = \frac{{}^2\sigma}{\rho g l} = \frac{1}{4} \quad (1107)$$

In der rechten Hälfte von Bild A.4 sind die Spannungsverläufe der exakten Lösung nach (255) auf der S. 98 und die der Lösung mit einem bzw. zwei Elementen gegenübergestellt. Die Spannung ist im Element konstant, so daß der Verlauf bei einem Element den bezogenen Wert  $\bar{\sigma} = 1/2$  aufweist. Bei zwei Elementen tritt bei  $x = l/2$  eine Unstetigkeit auf. Der Wert für  $\bar{\sigma}$  springt von  $3/4$  auf  $1/4$ .

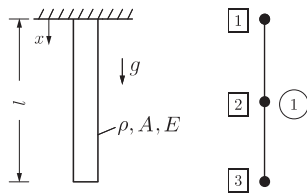
### ➤ A.5.3 Stabbeispiel III

In den Ausdruck nach (1092) wird die Formfunktion für das dreiknotige Element nach (334) auf der S. 121 eingesetzt. Daraus erhält man mit  $\xi = x/l$ :

$$\vec{F}_g = \rho g \int_0^l \begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \\ 4\frac{x}{l}\left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ \frac{x}{l}\left(-1 + 2\frac{x}{l}\right) \end{bmatrix} dx = \frac{Al\rho g}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1108)$$

Das dreiknotige Element besitzt nach (337) auf der S. 122 folgende Steifigkeitsmatrix:

$$\underline{K} = \frac{AE}{3l} \begin{bmatrix} 7 & -8 & 1 \\ -8 & 16 & -8 \\ 1 & -8 & 7 \end{bmatrix} \quad (1109)$$



**Bild A.5.** Einteilung des Stabes unter Eigengewicht in ein dreiknotiges Element

Die Einteilung des Stabes nach Bild A.5 in ein dreiknotiges Element führt unter Beachtung der Randbedingungen  $u_1 = 0$  auf folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Knotenverschiebungen  $u_2$  und  $u_3$ :

$$\frac{AE}{3l} \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{Al\rho g}{6} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -8 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\rho g l^2}{E} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1110)$$

Durch Inversion der Koeffizientenmatrix im voranstehenden linearen Gleichungssystem lassen sich die Verformungen berechnen:

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\rho g l^2}{E} \frac{1}{7 \cdot 16 - 8 \cdot 8} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\rho g l^2}{8 E} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1111)$$

Die Verschiebungen im Element und damit im Stab lassen sich über die Formfunktionen des dreiknotigen Stabelementes beschreiben:

$$\begin{aligned} u &= \left[ 1 - 3 \frac{x}{l} + 2 \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] u_1 + 4 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) u_2 + \frac{x}{l} \left( 2 \frac{x}{l} - 1 \right) u_3 \\ &= \frac{\rho g l^2}{E} \left[ 4 \frac{x}{l} \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \frac{3}{8} + \frac{x}{l} \left( 2 \frac{x}{l} - 1 \right) \frac{1}{2} \right] = \frac{\rho g}{E} \left( l - \frac{x}{2} \right) x \end{aligned} \quad (1112)$$

Die Lösung stimmt mit der exakten Verschiebung nach (253) auf der S. 98 überein.

#### ⊗ Spannungen

Die Spannungen lassen sich aus (1112) mit Hilfe des Hooke'schen Gesetzes  $\sigma = E du/dx$  gewinnen.

$$\begin{aligned} \sigma &= E \frac{d}{dx} \left( \frac{\rho g}{E} \left( l - \frac{x}{2} \right) x \right) = \rho g (l - x) = \rho g l \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \\ \bar{\sigma} &= \frac{\sigma}{\rho g l} = 1 - \frac{x}{l} \end{aligned} \quad (1113)$$

Die Spannung hat ihr Maximum an der Einspannung bei  $x = 0$  und nimmt zum Ende hin linear ab. Sie stimmt mit der exakten Spannung überein.

#### ⊗ A.5.4 Stabbeispiel IV

117

#### ⊗ Lösung mit einem Element

Für den Fall, daß der Hydraulikzylinder durch einen Stab mit der mittleren Querschnittsfläche  $\bar{A}$  dargestellt werden soll, ergibt sich folgende Gleichung:

$$\frac{\bar{A} E}{l_o + l_k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R F_1 \\ |F| \end{bmatrix} \quad (1114)$$

Daraus erhält man mit  $u_1 = 0$  die Beziehung für die Steifigkeit:

$$k_I = \frac{|F|}{u_2} = \frac{\bar{A} E}{l_o + l_k} \quad (1115)$$

⊗ **Lösung mit zwei Elementen**

Das Element 1 gibt die Ölsäule wieder und das Element 2 die Kolbenstange:

$$\underline{K}_1 = \frac{A_o E_o}{l_o} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right]; \quad \underline{K}_2 = \frac{A_k E}{l_k} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \quad (1116)$$

Durch die Überlagerung dieser beiden Steifigkeitsmatrizen und unter Berücksichtigung der Randbedingung  $u_1 = 0$  erhält man folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Verschiebungen  $u_2, u_3$ :

$$\frac{A_k E}{l_k} \left[ \begin{array}{c|c} 1 + \frac{A_o E_o l_k}{A_k E l_o} & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ |F| \end{bmatrix} \quad (1117)$$

Die Verschiebungen lauten:

$$u_2 = \frac{|F| l_0}{A_o E_o}; \quad u_3 = |F| \left( \frac{l_0}{A_o E_o} + \frac{l_k}{A_k E} \right) \quad (1118)$$

Damit erhält man die Steifigkeit  $k_{II}$  bei zwei Elementen:

$$k_{II} = \frac{|F|}{u_3} = \frac{A_o A_k E E_o}{A_o E_o l_k + A_k E l_o} \quad (1119)$$

Die mittlere Querschnittsfläche  $\bar{A}$  wird durch Gleichsetzen der Steifigkeiten  $k_I = k_{II}$  gewonnen:

$$\frac{\bar{A} E}{l_o + l_k} = \frac{A_o A_k E E_o}{A_o E_o l_k + A_k E l_o} \quad (1120)$$

Umstellen nach  $\bar{A}$  führt auf die gesuchte mittlere Querschnittsfläche:

$$\bar{A} = A_k A_o E_o \frac{l_o + l_k}{A_o E_o l_k + A_k E l_o} \quad (1121)$$

➤ **A.5.5 Stabbeispiel V**

⊗ **Ableitung der Ersatzkräfte aus der Anfangsdehnung  $\varepsilon_0$**

Die Anfangsdehnung  $\varepsilon_0$  wird der Dehnung  $\varepsilon_\sigma$  überlagert, die aus einer äußeren Belastung entsteht:

$$\varepsilon = \varepsilon_\sigma + \varepsilon_0 = u' \Rightarrow \varepsilon_\sigma = \varepsilon - \varepsilon_0 = u' - \varepsilon_0 \quad (1122)$$

Mit dem Hooke'schen Gesetz erhält man die Spannungen als :

$$\sigma = \varepsilon_\sigma E = E (\varepsilon - \varepsilon_0) = E (u' - \varepsilon_0) \quad (1123)$$

Setzt man diese beiden Größen  $\varepsilon_\sigma$  und  $\sigma$  in das Funktional nach (255) ein, so erhält man mit  $uF = \vec{u}^T \vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon_\sigma dV - \vec{u}^T \vec{F} = \frac{1}{2} \int_V E (u' - \varepsilon_0)^2 dV - \vec{u}^T \vec{F} \\ &= \frac{1}{2} \int_V E u'^2 dV + \underbrace{\frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_0^2 dV}_{\Pi_{\varepsilon_0}} - \int_V E u' \varepsilon_0 dV - \vec{u}^T \vec{F} \end{aligned} \quad (1124)$$

Die Ableitung der Verschiebung  $u' = du/dx$  läßt sich nach (259) auf der S.101 schreiben als:

$$u' = \left[ -\frac{1}{l} \mid \frac{1}{l} \right] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \vec{B}^T \vec{u} \quad (1125)$$

Einsetzen in (1124) führt auf:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_V E \vec{B}^T \vec{u} \vec{B}^T \vec{u} dV + \Pi_{\varepsilon_0} - \int_V E \vec{B}^T \vec{u} \varepsilon_0 dV - \vec{u}^T \vec{F} \\ &= \frac{1}{2} \vec{u}^T \underbrace{\int_V E \vec{B} \vec{B}^T dV}_{\underline{K}} \vec{u} + \Pi_{\varepsilon_0} - \underbrace{\vec{u}^T \int_V E \vec{B} \varepsilon_0 dV}_{\vec{F}_0} - \vec{u}^T \vec{F} \\ &= \frac{1}{2} \vec{u}^T \underline{K} \vec{u} + \Pi_{\varepsilon_0} - \vec{u}^T \vec{F}_0 - \vec{u}^T \vec{F} \end{aligned} \quad (1126)$$

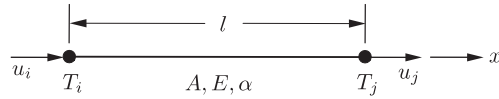
Für die Größe  $\Pi_{\varepsilon_0}$  gilt:  $\Pi_{\varepsilon_0} \neq \Pi_{\varepsilon_0}(\vec{u})$ . Damit verschwindet die Variation von  $\Pi_{\varepsilon_0}(\delta \Pi_{\varepsilon_0} = 0)$ . Somit führt die Variation  $\delta \Pi$  (s. Gl. (396) auf der S.149) auf folgenden Ausdruck:

$$\underline{K} \vec{u} = \vec{F} + \vec{F}_0 \quad (1127)$$

Aus der Anfangsdehnung  $\varepsilon_0$  entsteht der Kraftvektor  $\vec{F}_0$ .

⊗ **Beschreibung der Ersatzkraft  $\vec{F}_0$**

In Bild A.6 ist ein Element dargestellt, das an seinen Knoten jeweils eine Temperatur  $T_i$  bzw.  $T_j$  aufweist. Die Temperaturverteilung im Element wird über die lineare Formfunktion nach (258) auf der S. 100 beschrieben:



**Bild A.6.** Stabelement mit den Temperaturen  $T_i$  und  $T_j$

$$T(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_i + \frac{x}{l} T_j \quad (1128)$$

Die Anfangsdehnung  $\varepsilon_0$  ergibt sich daraus mit Hilfe des Wärmeausdehnungskoeffizienten  $\alpha$  zu:

$$\varepsilon_0(x) = \alpha T(x) = \alpha \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_i + \frac{x}{l} T_j \right] \quad (1129)$$

Durch Einsetzen von (1129) in (1126) erhält man unter der Voraussetzung, daß der Querschnitt  $A$ , der E-Modul  $E$  und der Wärmeausdehnungskoeffizient  $\alpha$  konstant im Element sind:

$$\begin{aligned} \vec{F}_0 &= A E \alpha \int_0^l \vec{B} \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_i + \frac{x}{l} T_j \right] dx \\ &= \frac{A E \alpha}{l} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \int_0^l \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) T_i + \frac{x}{l} T_j \right] dx = A E \alpha \frac{T_i + T_j}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1130)$$

⊗ **Lösung des Beispiels**

Die Steifigkeitsmatrix für die beiden Elemente lautet:

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = 2 \frac{A E}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1131)$$

Daraus ergibt sich die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  zu:



$$\underline{K}_g = 2 \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1132)$$

Die Belastung besteht aus der Kraft  $F$  am Knoten 2, sowie der thermischen Last, die jeweils für die beiden Elemente nach (1130) wie folgt berechnet werden:

$${}^1\vec{F}_0 = AE\alpha \frac{T_1 + T_2}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^2\vec{F}_0 = AE\alpha \frac{T_2 + T_3}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1133)$$

Durch Überlagerung von  ${}^1\vec{F}_0$  und  ${}^2\vec{F}_0$  erhält man den Gesamtvektor  $\vec{F}_{0_g}$ :

$$\vec{F}_{0_g} = \alpha AE \frac{T_1 + T_2}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha AE \frac{T_2 + T_3}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{\alpha}{2} AE \begin{bmatrix} -T_1 - T_2 \\ T_1 - T_3 \\ T_2 + T_3 \end{bmatrix} \quad (1134)$$

Damit ergibt sich die Beziehung  $\underline{K}_g \vec{u} = \vec{F} + \vec{F}_{0_g}$  zu:

$$2 \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ u_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R F_1 \\ F \\ {}^R F_3 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2} AE \begin{bmatrix} -T_1 - T_2 \\ T_1 - T_3 \\ T_2 + T_3 \end{bmatrix} \quad (1135)$$

Die Gleichung zur Bestimmung von  $u_2$  erhält man aus der zweiten Zeile von (1135):

$$4 \frac{AE}{l} u_2 = F + \frac{\alpha}{2} AE (T_1 - T_3) \Rightarrow u_2 = \frac{Fl}{4AE} + \frac{\alpha}{8} l (T_1 - T_3) \quad (1136)$$

Die Auflagerreaktionen lassen sich aus (1135) berechnen, indem die ermittelte Verschiebung dort eingesetzt wird. Aus der ersten Zeile von (1135) erhält

man:

$$\begin{aligned} {}^R F_1 &= -2 \frac{AE}{l} \left[ \frac{Fl}{4AE} + \frac{\alpha}{8} l (T_1 - T_3) \right] + \frac{\alpha}{2} AE (T_1 + T_2) \\ &= -\frac{F}{2} + \frac{\alpha}{4} AE (T_1 + 2T_2 + T_3) \end{aligned} \tag{1137}$$

Aus der dritten Zeile ergibt sich:

$$\begin{aligned} {}^R F_3 &= -2 \frac{AE}{l} \left[ \frac{Fl}{4AE} + \frac{\alpha}{8} l (T_1 - T_3) \right] - \frac{\alpha}{2} AE (T_2 + T_3) \\ &= -\frac{F}{2} - \frac{\alpha}{4} AE (T_1 + 2T_2 + T_3) \end{aligned} \tag{1138}$$

## A.5 Zweidimensionale Stabprobleme

A.5

### ➤ A.5.6 Stabbeispiel VI

133

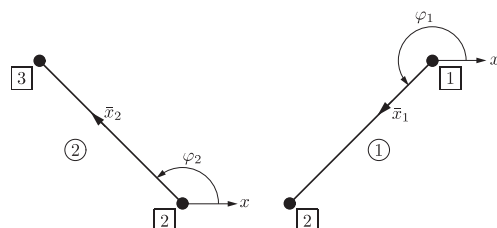


Bild A.7. Beispiel zum zweidimensionalen Stab

#### ➤ Einteilung in Elemente

Die beiden Stäbe werden jeweils in ein Element eingeteilt. Die Knoten- und Elementnummerierung sowie die Orientierung der lokalen Koordinatensysteme sind in Bild A.7 festgehalten. Tab. A.1 enthält die Elementknotenzuordnung und die Winkel, die die Lage der Elemente beschreiben:

Tabelle A.1. Elementknotenzuordnung und Winkel der Elemente nach Bild A.7

Element	Knoten $i$	Knoten $j$	$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
1	1	2	$225^\circ$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2	2	3	$135^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

#### ➤ Elementsteifigkeitsmatrizen

Die Steifigkeitsmatrizen werden zunächst ohne konkrete Zahlenvorgaben aufgestellt. Die noch nicht festgelegten Größen werden vor die Matrix gezogen und mit  $k_1$  bzw.  $k_2$  abgekürzt.

$$\underline{K}_1 = \underbrace{\frac{A_1 E_1}{l}}_{k_1} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix} \quad (1139)$$

$$\underline{K}_2 = \underbrace{\frac{A_2 E_2}{l}}_{k_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \end{array} \quad (1140)$$

Die Zeilen und Spalten sind mit den Freiheitsgraden  $u_1, v_1, \dots$  gekennzeichnet, um sie später in die Gesamtsteifigkeitsmatrix einsteuern zu können.

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die additive Überlagerung der Elementsteifigkeitsmatrizen führt zu der nachfolgenden Gesamtsteifigkeitsmatrix. Die Anteile von Elementsteifigkeitsmatrix 1 und 2 sind wie folgt gekennzeichnet:  $[\dots]$  von Element 1 ;  $[\dots]$  von Element 2.

$$\underline{K} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline [k_1] & [k_1] & -[k_1] & -[k_1] & 0 & 0 \\ \hline [k_1] & [k_1] & -[k_1] & -[k_1] & 0 & 0 \\ \hline -[k_1] & -[k_1] & [k_1] + [k_2] & [k_1] - [k_2] & -[k_2] & [k_2] \\ \hline -[k_1] & -[k_1] & [k_1] - [k_2] & [k_1] + [k_2] & [k_2] & -[k_2] \\ \hline 0 & 0 & -[k_2] & [k_2] & [k_2] & -[k_2] \\ \hline 0 & 0 & [k_2] & -[k_2] & -[k_2] & [k_2] \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \end{array} \quad (1141)$$

⊗ **Geometrische Randbedingungen**

Die Knoten 1 und 3 sind fest eingespannt, so daß sie keine Verschiebung ausführen können. Damit sind folgende Verschiebungen bekannt:  $u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$ . Unbekannt sind die Verschiebungen des Knotens 2,  $u_2$  und  $v_2$ .

⊗ **Verformungen**

Für die zahlenmäßige Berechnung der Verformungen werden folgende Daten vorgegeben:  $k_1 = 2$ ;  $k_2 = 1$ ;  $F = -1/2$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 3 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{F_{x_1}} \\ R_{F_{y_1}} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ R_{F_{x_3}} \\ R_{F_{y_3}} \end{bmatrix} \quad (1142)$$

Es liegen sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten  $u_2, v_2, R_{F_{x_1}}, R_{F_{y_1}}, R_{F_{x_3}}, R_{F_{y_3}}$  vor. Die Kräfte  $R_{F_{x_i}}$  und  $R_{F_{y_i}}$  stellen sich als Auflagerreaktionen dar. Zunächst werden die unbekannten Verformungen  $u_2, v_2$  ermittelt, indem ein Untergleichungssystem betrachtet wird. Dieses erhält man durch Streichen der Zeilen und Spalten in der Gesamtsteifigkeitsmatrix, die eine geometrische Randbedingung aufweisen. Es bleibt damit folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Verformungen übrig:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{u} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad (1143)$$

In Bild A.8 sind die Verformungen des Systems dargestellt, wobei die unverformte Struktur strichpunktiert ist. Der Knoten 2 verschiebt sich um den Vektor  $\vec{u}$  in seine verformte Lage. Die unsymmetrische Verformung ist auf die unterschiedlichen Werte  $k_1 \neq k_2$  zurückzuführen.

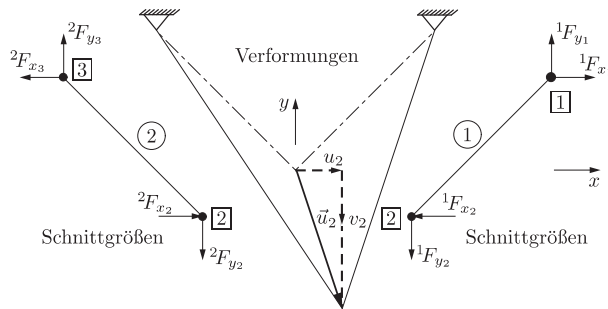


Bild A.8. Verformungen und Schnittgrößen der Stäbe

### ⊗ Schnittgrößen

Die Schnittgrößen gewinnt man aus dem Produkt Einzelsteifigkeitsmatrix  $\times$  Verformungsvektor ( $\underline{K}_i \vec{u} = \vec{F}$ ):

- $\underline{K}_i$  - Einzelsteifigkeitsmatrix
- ${}^i\vec{u}$  - Verformungsvektor des Elementes  $i$
- ${}^i\vec{F}$  - Schnittgrößen<sup>1</sup> des Elementes  $i$

$$\underline{K}_1 {}^1\vec{u} = {}^1\vec{F}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1F_{x_1} \\ {}^1F_{y_1} \\ {}^1F_{x_2} \\ {}^1F_{y_2} \end{bmatrix} \quad (1144)$$

$$\underline{K}_2 {}^2\vec{u} = {}^2\vec{F}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2F_{x_2} \\ {}^2F_{y_2} \\ {}^2F_{x_3} \\ {}^2F_{y_3} \end{bmatrix} \quad (1145)$$

### ⊗ Auflagerreaktionen

Die Auflagerreaktionen lassen sich auf zweierlei Weise berechnen:

- Aus der Krafttrandbedingung ergibt sich, daß die äußeren Kräfte mit den Schnittgrößen im Gleichgewicht stehen müssen (s. (278) auf der S. 105). Betrachtet man die  $x$ -Richtung des Knotens 1, so ergibt sich:  ${}^R F_{x_1} = {}^1 F_{x_1} = 1/4$ .
- Aus (1142) können die Auflagerreaktionen berechnet werden. In dieser Beziehung stehen die unbekannten Auflagerreaktionen auf der rechten Seite. Man berechnet sie, indem man die Gesamtsteifigkeitsmatrix mit dem Verformungsvektor multipliziert. Als Beispiel sei hier die Reaktionskraft  ${}^R F_{x_1}$  angeführt. Sie ergibt sich aus (1142) aus dem Produkt der ersten Zeile der Gesamtsteifigkeitsmatrix mit dem Verformungsvektor:

---

<sup>1</sup>

- ${}^i F_{x_j}$  - Schnittkraft in  $x$ -Richtung des Elementes  $i$  am Knoten  $j$
- ${}^i F_{y_j}$  - Schnittkraft in  $y$ -Richtung des Elementes  $i$  am Knoten  $j$ .

$$\frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 2 & 2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0 & 0 \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[ -2\frac{1}{8} - 2\left(-\frac{3}{8}\right) \right] = \frac{1}{4} = {}^R F_{x_1} \quad (1146)$$

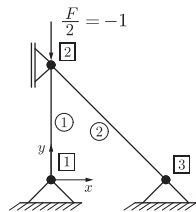
### ➤ A.5.7 Stabbeispiel VII

Die Stabstruktur ist symmetrisch zur  $y$ -Achse bzgl. Geometrie, Belastung, Material und geometrischer Randbedingungen. Daher wird nur eine Hälfte in zwei Stabelemente eingeteilt. Dazu müssen die Querschnittsfläche von Element 1 und die Belastung halbiert werden. In der Tab. A.2 sind die Elementknotenzuordnung sowie die wesentlichen Daten für die Rechnung aufgeführt.

133

**Tabelle A.2.** Elementknotenzuordnung und Geometriedaten

Elem.-Nr.	Knoten	$A$	$E$	$l_i$	$\varphi$	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
1	1	2	1	1	$90^\circ$	1	0
2	2	3	2	$\sqrt{2}$	$-45^\circ$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$



**Bild A.9.** Einteilung der Stabstruktur in Elemente unter Ausnutzung der Symmetrie

### ➤ Steifigkeitsmatrizen

Die beiden Steifigkeitsmatrizen werden nach (348) auf der S. 125 berechnet:

$$\underline{K}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \end{array} \end{array} ; \underline{K}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \end{array} \end{array} \quad (1147)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

In (1148) sind die beiden Steifigkeitsmatrizen zur Gesamtsteifigkeitsmatrix überlagert. Die Anteile  $[\dots]$  kommen von Element 1. Die Anteile  $[\dots]$  von Element 2.

$$\underline{K}_g = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} [0] & [0] & [0] & [0] & 0 & 0 \\ [0] & [1] & [0] & [-1] & 0 & 0 \\ [0] & [0] & [0] + [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [0] - [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [-\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [\frac{1}{2}\sqrt{2}] \\ [0] & [-1] & [0] - [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [1] + [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [-\frac{1}{2}\sqrt{2}] \\ 0 & 0 & [-\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [-\frac{1}{2}\sqrt{2}] \\ 0 & 0 & [\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [-\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [-\frac{1}{2}\sqrt{2}] & [\frac{1}{2}\sqrt{2}] \end{array} \right] \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \end{array} \end{array} \quad (1148)$$

⊗ **Geometrische Randbedingungen und Verformungen**

Die Struktur hat nur einen unbekannten Freiheitsgrad, nämlich  $v_2$ . Daher werden aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  alle Zeilen und Spalten bis auf die von  $v_2$  gestrichen:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) v_2 = -1 \Rightarrow v_2 = -\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\sqrt{2}} = -\frac{2}{2 + \sqrt{2}} \approx -0,586 \quad (1149)$$



⊗ **Schnittgrößen**

Die Schnittgrößen ergeben sich aus dem Produkt der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_i$  des Elementes  $i$  mit den Verformungen  ${}^i\vec{u}$  des Elementes  $i$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{2+\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{2+\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{2}{2+\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1F_{x_1} \\ {}^1F_{y_1} \\ {}^1F_{x_2} \\ {}^1F_{y_2} \end{bmatrix} \quad (1150)$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{2+\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2F_{x_2} \\ {}^2F_{y_2} \\ {}^2F_{x_3} \\ {}^2F_{y_3} \end{bmatrix} \quad (1151)$$

⊗ **Auflagerreaktionen**

Die Auflagerreaktionen erhält man aus  $\underline{K}_g \vec{u} = \vec{F}$ . In dem Verformungsvektor  $\vec{u}$  tritt als Größe, die ungleich Null ist, nur die Verschiebung  $v_2$  auf. Daher findet aus  $\underline{K}_g$  nach (1148) nur die Spalte  $v_2$  Berücksichtigung:

$$-\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 1+\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{2}{2+\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{2+\sqrt{2}} \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ -1 \\ -\frac{1}{1+\sqrt{2}} \\ \frac{1}{1+\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,586 \\ 0,414 \\ -1 \\ -0,414 \\ 0,414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R F_{x_1} \\ {}^R F_{y_1} \\ {}^R F_{x_2} \\ {}^R F_{y_2} \\ {}^R F_{x_3} \\ {}^R F_{y_3} \end{bmatrix} \quad (1152)$$

## ➤ A.5.8 Stabbeispiel VIII

134

## ➤ Einteilung in Elemente

Das Problem ist symmetrisch zur  $x$ -Achse. Bild A.10 zeigt die Einteilung in vier Elemente. Die Elementknotenzuordnung ist in Tab. A.3 festgehalten.

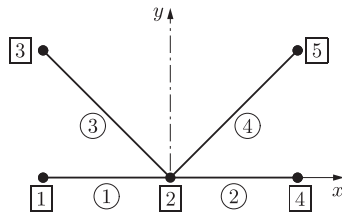


Bild A.10. Einteilung der Stabstruktur in Elemente unter Ausnutzung der Symmetrie

Tabelle A.3. Elementknotenzuordnung und Geometriedaten

Elem.-Nr.	Knoten		$\varphi$	$\sin(\varphi)$	$\cos(\varphi)$
1	1	2	$0^\circ$	0	1
2	2	4	$0^\circ$	0	1
3	2	3	$135^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
4	2	5	$45^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$

## ➤ Steifigkeitsmatrizen

In den nachfolgenden Steifigkeitsmatrizen sind die Zeilen und Spalten mit den Freiheitsgraden der Knoten der Elemente bezeichnet. Die Anteile von den einzelnen Elementen sind wie folgt markiert:  $[\dots] \hat{=}$  Element 1;  $[\dots] \hat{=}$  Element 2;  $\langle \dots \rangle \hat{=}$  Element 3;  $\{\dots\} \hat{=}$  Element 4.

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} [u_1][u_2] & [v_1][v_2] & [u_2][u_4] & [v_2][v_4] \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_1][u_2] \\ [v_1][v_2] \\ [u_2][u_4] \\ [v_2][v_4] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\underline{K}_3 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{AE}{l} \begin{array}{c|c|c|c} \langle u_2 \rangle & \langle v_2 \rangle & \langle u_3 \rangle & \langle v_3 \rangle \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \langle u_2 \rangle \\ \langle v_2 \rangle \\ \langle u_3 \rangle \\ \langle v_3 \rangle \end{array} \\
\underline{K}_4 &= \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{AE}{l} \begin{array}{c|c|c|c} \{u_2\} & \{v_2\} & \{u_5\} & \{v_5\} \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \{u_2\} \\ \{v_2\} \\ \{u_5\} \\ \{v_5\} \end{array} \quad (1153)
\end{aligned}$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix unter Berücksichtigung der Randbedingungen**

Es wird unmittelbar die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\hat{\underline{K}}_g$  aufgestellt, die sich nach dem Streichen der Zeilen und Spalten infolge der wesentlichen Randbedingungen ergibt, die den Wert Null haben:

$$\begin{aligned}
\hat{\underline{K}}_g &= \frac{AE}{l} \left[ \begin{array}{c|c} u_2 & u_4 \\ \hline [1] + [1] + \langle \frac{1}{4}\sqrt{2} \rangle + \{ \frac{1}{4}\sqrt{2} \} & [-1] \\ \hline [-1] & [1] \end{array} \right] \begin{array}{l} u_2 \\ u_4 \end{array} \\
&= \frac{AE}{l} \left[ \begin{array}{c|c} u_2 & u_4 \\ \hline 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} u_2 \\ u_4 \end{array} \quad (1154)
\end{aligned}$$

⊗ **Verformungen**

$$\frac{AE}{l} \left[ \begin{array}{c|c} 2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} u_2 \\ \bar{u} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} F \\ {}^R F_{x_4} \end{array} \right] \quad (1155)$$

Aus der ersten Zeile erhält man für  $u_2$ :

$$u_2 = \frac{2}{4 + \sqrt{2}} \left( \bar{u} + \frac{F}{AE} l \right) \quad (1156)$$

⊗ **Auflagerreaktion des Auflagers an der Stelle  $x = l, y = 0$**

Aus der zweiten Zeile von (1155) gewinnt man die gesuchte Auflagerreaktion:

$$R_{F_{x4}} = -\frac{AE}{l} u_2 + \frac{AE}{l} \bar{u} = \frac{AE}{l} \frac{2 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}} \bar{u} - \frac{2}{4 + \sqrt{2}} F \quad (1157)$$

⊗ **A.5.9 Stabbeispiel IX**

134

⊗ **Einteilung in Elemente**

Die Geometrie, Lagerung und das Material sind bzgl. der  $x$ -Achse symmetrisch. Nicht aber die Belastung. Sie steht senkrecht zur Symmetrieachse. Damit ist das Problem antimetrisch. Es muß nur eine Hälfte der Stabstruktur berücksichtigt werden. Diese ist in Bild A.11 in drei Elemente eingeteilt. Für den Knoten 1 wird eine zusätzliche Lagerungsbedingung infolge der Ausnutzung der Antimetrie der Form  $u_1 = 0$  eingeführt.

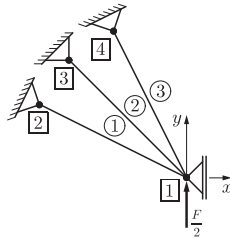


Bild A.11. Einteilung der Stabstruktur in Elemente unter Ausnutzung der Antimetrie

⊗ **Steifigkeitsmatrizen der Elemente**

$$\underline{K}_1 = \frac{AE}{4l} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ \begin{array}{c|c|c|c} 3 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} & -1 \\ \hline -3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 \end{array} \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array} \quad (1158)$$

$$\underline{K}_2 = \frac{AE}{4l} \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \\ \hline 2 & -2 & -2 & 2 \\ \hline -2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline -2 & 2 & 2 & -2 \\ \hline 2 & -2 & -2 & 2 \end{array} \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (1159)$$

$$\underline{K}_3 = \frac{AE}{4l} \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c} u_1 & v_1 & u_4 & v_4 \\ \hline 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 \\ \hline -1 & \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{3} & -3 & -\sqrt{3} & 3 \end{array} \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \quad (1160)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die Stabstruktur besitzt vier Knoten und damit acht Freiheitsgrade, womit die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  eine  $8 \times 8$ -Matrix ist.

$$\underline{K}_g = \frac{AE}{4l} \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \\ \hline 6 & -2(\sqrt{3}+1) & -3 & \sqrt{3} & -2 & 2 & -1 & \sqrt{3} \\ \hline -2(\sqrt{3}+1) & 6 & \sqrt{3} & -1 & 2 & -2 & \sqrt{3} & -3 \\ \hline -3 & \sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\sqrt{3} \\ \hline \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & 3 \end{array} \end{bmatrix} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{array} \quad (1161)$$

Die halbe Bandbreite  $b$  nach (113) auf der S. 48 berechnet sich mit  $\Delta n = 3$  und  $f = 2$  zu 8. Damit geht die Bandstruktur verloren und die Matrix  $\underline{K}_g$  ist voll besetzt.

⊗ **Verformungen**

Das System hat nur eine Unbekannte, nämlich  $v_1$ . Nach Berücksichtigung der Lagerungsbedingungen bleibt nur noch das Element aus der Zeile und Spalte  $v_1$  von  $\underline{K}_g$  übrig:

$$\frac{3}{2} \frac{AE}{l} v_1 = \frac{F}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{1}{3} \frac{Fl}{AE} \quad (1162)$$

⊗ **Schnittgrößen**

Aus dem Produkt  $\underline{K}_i {}^i\vec{u}$ , wobei  $i$  die Elementnummer darstellt, gewinnt man die Schnittgrößen. Der Verformungsvektor  ${}^i\vec{u}$  enthält jeweils nur eine Komponente, nämlich  $v_1$ . Damit ist nur die zweite Spalte in den Steifigkeitsmatrizen von Bedeutung. Man erhält für die Elemente:

$$\underline{K}_1 {}^1\vec{u} = \frac{AE}{4l} \frac{1}{3} \frac{Fl}{AE} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{F}{12} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \\ \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1F_{x_1} \\ {}^1F_{y_1} \\ {}^1F_{x_2} \\ {}^1F_{y_2} \end{bmatrix} \quad (1163)$$

$$\underline{K}_2 {}^2\vec{u} = \frac{AE}{4l} \frac{1}{3} \frac{Fl}{AE} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{F}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^2F_{x_1} \\ {}^2F_{y_1} \\ {}^2F_{x_3} \\ {}^2F_{y_3} \end{bmatrix} \quad (1164)$$

$$\underline{K}_3 {}^3\vec{u} = \frac{AE}{4l} \frac{1}{3} \frac{Fl}{AE} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ \sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{F}{12} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 3 \\ \sqrt{3} \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3F_{x_1} \\ {}^3F_{y_1} \\ {}^3F_{x_4} \\ {}^3F_{y_4} \end{bmatrix} \quad (1165)$$

⊗ **Auflagerkräfte**

Die Auflagerkräfte lassen sich aus den Gleichgewichtsbeziehungen der Kräfte an den Knoten gewinnen:

$$F_{x_k} = \sum_j {}^jF_{x_k}; \quad F_{y_k} = \sum_j {}^jF_{y_k} \quad (1166)$$

Auf der linken Seite der beiden Gleichungen steht jeweils die äußere Kraft (in  $x$ - bzw.  $y$ - Richtung) am Knoten  $k$ . Auf der rechten Seite werden die inneren Kräfte über alle an den Knoten  $k$  angrenzenden Elemente aufaddiert. Damit

ergibt sich für die Knoten:

$$\begin{aligned}
 \text{Knoten 1:} \quad {}^R F_{x_1} &= {}^1 F_{x_1} + {}^2 F_{x_1} + {}^3 F_{x_1} = -\frac{F}{12}\sqrt{3} - \frac{F}{6} - \frac{F}{12}\sqrt{3} \\
 &= -\frac{1}{6}(1 + \sqrt{3})F = -0,455F \\
 {}^1 F_{y_1} + {}^2 F_{y_1} + {}^3 F_{y_1} &= -\frac{F}{12} + \frac{F}{6} + \frac{3F}{12} = \frac{F}{2} \\
 \text{Knoten 2:} \quad {}^R F_{x_2} &= {}^1 F_{x_2} = \frac{\sqrt{3}}{12}F \\
 {}^R F_{y_2} &= {}^1 F_{y_2} = -\frac{F}{12} \\
 \text{Knoten 3:} \quad {}^R F_{x_3} &= {}^2 F_{x_3} = \frac{F}{6} \\
 {}^R F_{y_3} &= {}^2 F_{y_3} = -\frac{F}{6} \\
 \text{Knoten 4:} \quad {}^R F_{x_4} &= {}^3 F_{x_4} = \frac{\sqrt{3}}{12}F \\
 {}^R F_{y_4} &= {}^3 F_{y_4} = -\frac{F}{4}
 \end{aligned} \tag{1167}$$

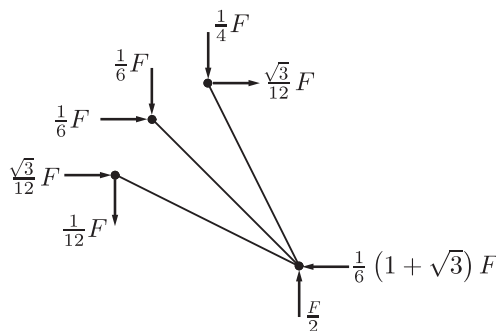


Bild A.12. Die Belastung und Reaktionskräfte des Systems

### ➤ A.5.10 Stabbeispiel X

134

#### ⊗ Einteilung in Elemente, Randbedingungen und Belastung

In der rechten Hälfte von Bild A.13 ist die Einteilung der Struktur in drei Stabelemente dargestellt. Es wird die Symmetrie ausgenutzt und somit nur die linke Hälfte der Struktur berücksichtigt. Die eingefügten Randbedingungen an den Knoten 2 und 3 erzwingen eine symmetrische Verformung. Die Belastung am Knoten 3 ist halbiert, da nur eine Strukturhälfte belastet wird. Ebenso tritt die Querschnittsfläche des Stabes 2, da er auf der Symmetrieachse liegt, nur zur Hälfte auf. Die Elementknotenanzuordnung ist in der Tab. A.4 aufgeführt.

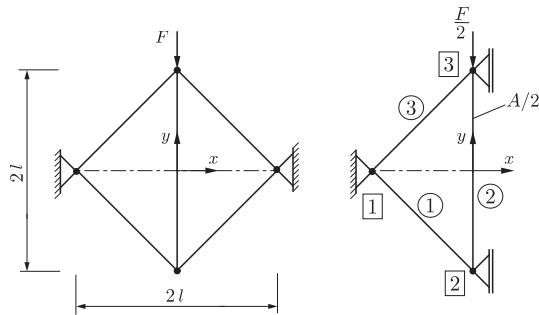


Bild A.13. Symmetrische 2D-Stabstruktur und die Einteilung einer Hälfte in Elemente

### ⊗ Steifigkeitsmatrizen der Elemente

Nachfolgend sind die Steifigkeitsmatrizen und die entsprechenden Freiheitsgrade des Problems angeführt. Es tritt als gemeinsamer Faktor die Steifigkeit  $k = AE/l$  auf.

$$\underline{K}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4} k \begin{bmatrix} [u_1] & [v_1] & [u_2] & [v_2] \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_1] \\ [v_1] \\ [u_2] \\ [v_2] \end{bmatrix}$$

$$\underline{K}_2 = \frac{1}{4} k \begin{bmatrix} [u_2] & [v_2] & [u_3] & [v_3] \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u_2] \\ [v_2] \\ [u_3] \\ [v_3] \end{bmatrix}$$

Tabelle A.4. Elementknotenzuordnung und Geometriedaten

Elem.	Knoten	Fläche	E-Modul	Winkel $\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$
1	1 2	$A$	$E$	$-45^\circ$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$
2	2 3	$\frac{A}{2}$	$E$	$90^\circ$	1	0
3	1 3	$A$	$E$	$45^\circ$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$



$$\underline{K}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4} k \begin{array}{c|c|c|c} \langle u_1 \rangle & \langle v_1 \rangle & \langle u_3 \rangle & \langle v_3 \rangle \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \langle u_1 \rangle \\ \langle v_1 \rangle \\ \langle u_3 \rangle \\ \langle v_3 \rangle \end{array} \quad (1168)$$

⑤ **Gesamtsteifigkeitsmatrix nach dem Einbringen der Randbedingungen**

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\hat{\underline{K}}_g$  ist eine  $2 \times 2$  Matrix, da als Unbekannte nur die beiden Verschiebungen  $v_2$  und  $v_3$  auftreten:

$$\hat{\underline{K}}_g = \frac{k}{4} \left[ \begin{array}{c|c} [\sqrt{2}] + [1] & [-1] \\ \hline [-1] & [1] + \langle \sqrt{2} \rangle \end{array} \right] = k \left[ \begin{array}{c|c} 0,604 & -0,25 \\ \hline -0,25 & 0,604 \end{array} \right] \quad (1169)$$

⑤ **Verformungen des Problems**

Das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der Verschiebungen  $v_2$  und  $v_3$  hat nachfolgendes Aussehen:

$$\frac{k}{4} \left[ \begin{array}{c|c} 1 + \sqrt{2} & -1 \\ \hline -1 & 1 + \sqrt{2} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{F}{2} \end{array} \right] \quad (1170)$$

Durch Inversion von  $\hat{\underline{K}}_g$  kann man die Verschiebungen bestimmen:

$$\hat{\underline{K}}_g^{-1} = \frac{4}{k} \frac{1}{(1 + \sqrt{2})^2 - 1} \left[ \begin{array}{c|c} 1 + \sqrt{2} & 1 \\ \hline 1 & 1 + \sqrt{2} \end{array} \right] = \frac{2}{k} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \hline \sqrt{2} - 1 & 1 \end{array} \right] \quad (1171)$$

Aus der Multiplikation  $\hat{\underline{K}}_g^{-1} \vec{F}$  erhält man die gesuchten Verschiebungen:

$$\left[ \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \end{array} \right] = \frac{2}{k} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \sqrt{2} - 1 \\ \hline \sqrt{2} - 1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\frac{F}{2} \end{array} \right] = \frac{F}{k} \left[ \begin{array}{c} 1 - \sqrt{2} \\ -1 \end{array} \right] \quad (1172)$$

⊗ **Spannungen im Vertikalstab**

Die Spannungen im Stab lassen sich über das Hooke'sche Gesetz  $\sigma = \varepsilon E$  beschreiben. Die Größe  $\Delta l$  in der Dehnung  $\varepsilon = \Delta l/l$  kann man über die Knotenverschiebungen ausdrücken:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{v_3 - v_2}{2l} = \frac{F}{k} \frac{-1 - (1 - \sqrt{2})}{2l} = \frac{F}{AE} \left( \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \right) \quad (1173)$$

Damit erhält man die Spannung im Vertikalstab, die sich als Druckspannung darstellt:

$$\sigma = \frac{F}{AE} \left( \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \right) E = \left( \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \right) \frac{F}{A} = -0,293 \frac{F}{A} \quad (1174)$$

⊗ **Auflagerkräfte im linken Lager**

Aus der Betrachtung des Gleichgewichtes  $\sum_i {}^iF_x = {}^RF_x$  und  $\sum_i {}^iF_y = {}^RF_y$  am Knoten 1 lassen sich die Auflagerkräfte ermitteln. Dabei sind  ${}^iF_x$  bzw.  ${}^iF_y$  die Schnittgrößen der Elemente, die an den Knoten 1 angrenzen. Dies sind hier die Elemente 1 und 3.

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{Fl}{AE} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} F \begin{bmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 1 \\ \sqrt{2} - 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1F_{x_1} \\ {}^1F_{y_1} \\ {}^1F_{x_2} \\ {}^1F_{y_2} \end{bmatrix} \quad (1175)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{Fl}{AE} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{4} F \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3F_{x_1} \\ {}^3F_{y_1} \\ {}^3F_{x_3} \\ {}^3F_{y_3} \end{bmatrix} \quad (1176)$$

Die Auflagerkraft  ${}^RF_{x_1}$  ergibt sich aus den Schnittkräften am Knoten 1 der Elemente 1 und 3 in  $x$ -Richtung:

$${}^RF_{x_1} = {}^1F_{x_1} + {}^3F_{x_1} = \frac{\sqrt{2}}{4} F(1 - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{4} F = \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{2}) F = 0,207 F \quad (1177)$$

Analog ergibt sich die Auflagerkraft  ${}^RF_{y_1}$  aus den Schnittkräften am Knoten 1 der Elemente 1 und 3:

$${}^R F_{y_1} = {}^1 F_{y_1} + {}^3 F_{y_1} = \frac{\sqrt{2}}{4} F (\sqrt{2} - 1) + \frac{\sqrt{2}}{4} F = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{2} F = \frac{1}{2} F \quad (1178)$$

### ➤ A.5.11 Stabbeispiel XI

135

#### ➤ Einteilung der Struktur in Elemente

Das System ist symmetrisch bzgl. der  $y$ -Achse. Daher muß nur die linke oder rechte Hälfte berücksichtigt werden (s. Bild (A.14)). Es wird hier die rechte Hälfte in zwei Stabelemente eingeteilt. Die Randbedingung für Knoten 3 bewirkt, daß er sich nur in  $y$ -Richtung verschieben kann.

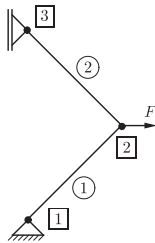


Bild A.14. Einteilung der Struktur in zwei Stabelemente

#### ➤ Einzelsteifigkeitsmatrizen

$$\underline{K}_1 = \frac{1}{2} \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix} \quad (1179)$$

$$\underline{K}_2 = \frac{1}{2} \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \quad (1180)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix nach dem Einbringen der Lagerungsbedingungen**

Aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  werden die Zeilen und Spalten gestrichen, die einem Freiheitsgrad zugeordnet sind, der als Null bekannt ist ( $u_1 = v_1 = u_3 = 0$ ). Damit bleibt folgende Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\hat{\underline{K}}_g$  übrig:

$$\hat{\underline{K}}_g = \frac{1}{2} \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{array}{c|c|c} u_2 & v_2 & v_3 \\ \hline 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} \quad (1181)$$

⊗ **Die Verschiebungen des Systems**

Mit Hilfe von  $\hat{\underline{K}}_g$  ergibt sich nachfolgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungen  $u_2$ ,  $v_2$  und der Auflagerreaktion  ${}^R F_{y_3}$ , wobei für  $v_3$  die bekannte Verschiebung  $\bar{v}$  eingesetzt wird:

$$\frac{1}{2} \frac{AE}{\sqrt{2}l} \begin{array}{c|c|c} 2 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 2 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{c} u_2 \\ v_2 \\ \bar{v} \end{array} = \begin{array}{c} F \\ 0 \\ \frac{1}{2} {}^R F_{y_3} \end{array} \quad (1182)$$

Auf der rechten Seite erscheint nur  $1/2 {}^R F_{y_3}$ , da bedingt durch die Ausnutzung der Symmetrie nur die halbe Auflagerkraft in (1182) auftritt:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{\sqrt{2}l} \left( u_2 + \frac{1}{2} \bar{v} \right) &= F \Rightarrow u_2 = \frac{F\sqrt{2}l}{AE} - \frac{1}{2} \bar{v} \\ \frac{AE}{\sqrt{2}l} \left( v_2 - \frac{1}{2} \bar{v} \right) &= 0 \Rightarrow v_2 = \frac{1}{2} \bar{v} \end{aligned} \quad (1183)$$

⊗ **Die vertikale Auflagerkraft im Lager A**

Aus der letzten Zeile von (1182) erhält man die Auflagerreaktion  ${}^R F_{y_3}$ :

$$\begin{aligned} \frac{{}^R F_{y_3}}{2} &= \frac{1}{2} \frac{AE}{\sqrt{2}l} (u_2 - v_2 + \bar{v}) \\ {}^R F_{y_3} &= \frac{AE}{\sqrt{2}l} \left( F \frac{\sqrt{2}l}{AE} - \frac{1}{2} \bar{v} - \frac{1}{2} \bar{v} + \bar{v} \right) = F \end{aligned} \quad (1184)$$

➤ A.5.12 Stabbeispiel XII

135

⊙ Minimierung des Volumens bei vorgegebener Verformung

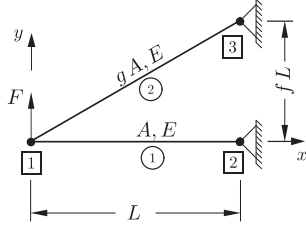


Bild A.15. Das Stabsystem mit seinen Abmessungen und Belastungen

Das normierte Volumen  $\bar{V} = V/(AL) = 1 + g\sqrt{1+f^2}$  ist nur eine Funktion von  $f$  und  $g$ . Die dimensionslose Verschiebung  $\bar{v} = vAE/(FL)$  an der Kraftangriffsstelle lautet:

$$\bar{v} = v \frac{AE}{FL} = \frac{\sqrt{(1+f^2)^3 + g}}{gf^2} \quad (1185)$$

Das Ziel der Optimierung ist es, das Volumen der beiden Stäbe zu minimieren und die vorgegebene Verformung  $\hat{v}$  einzuhalten. Daraus ergibt sich mit Hilfe des Lagrange'schen Multiplikators  $\lambda$  folgende Zielfunktion  $Z$ :

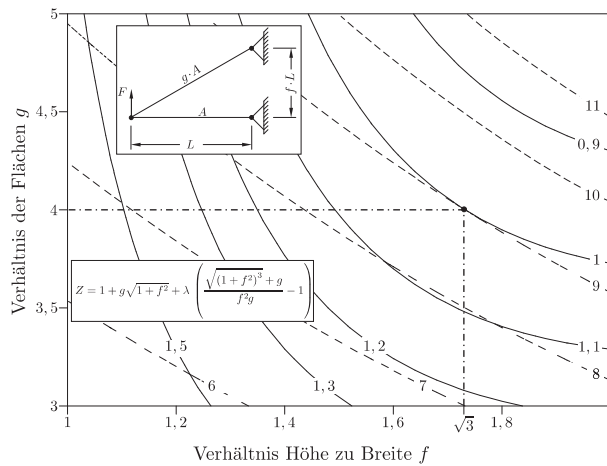
$$Z = \bar{V} + \lambda (\bar{v} - \hat{v}) = 1 + g\sqrt{1+f^2} + \lambda \left( \frac{\sqrt{(1+f^2)^3 + g}}{gf^2} - \hat{v} \right) \quad (1186)$$

Das Minimum dieser Funktion  $Z = Z(f, g, \lambda)$  gewinnt man, indem die partiellen Ableitungen nach  $f, g$  und  $\lambda$  zu Null gesetzt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial f} &= \frac{fg}{\sqrt{1+f^2}} + \lambda \left( -2 \frac{\sqrt{(1+f^2)^3 + g}}{gf^3} + 3 \frac{\sqrt{1+f^2}}{fg} \right) = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial g} &= \sqrt{1+f^2} + \lambda \left( -\frac{\sqrt{(1+f^2)^3 + g}}{f^2 g^2} + \frac{1}{gf^2} \right) = 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial \lambda} &= \frac{\sqrt{(1+f^2)^3 + g}}{f^2 g} - \hat{v} = 0 \end{aligned} \quad (1187)$$

Aus diesen drei Gleichungen werden die optimalen Werte für  $f, g$  und  $\lambda$  bestimmt. Es ergibt sich:

$$f = \sqrt{1 + \frac{2}{\hat{v}}}; \quad g = \frac{1}{\hat{v}} \sqrt{\frac{8(1 + \hat{v})}{\hat{v}}}; \quad \lambda = \frac{4(2 + \hat{v})}{\hat{v}^3} \quad (1188)$$



**Bild A.16.** Darstellung der Isolinien von Volumen und Verformung. Im Punkt  $f = \sqrt{3}$  und  $g = 4$  liegt die Lösung für  $\hat{v} = 1$

⊗ **Betrachtung des Falles  $\hat{v} = 1$**

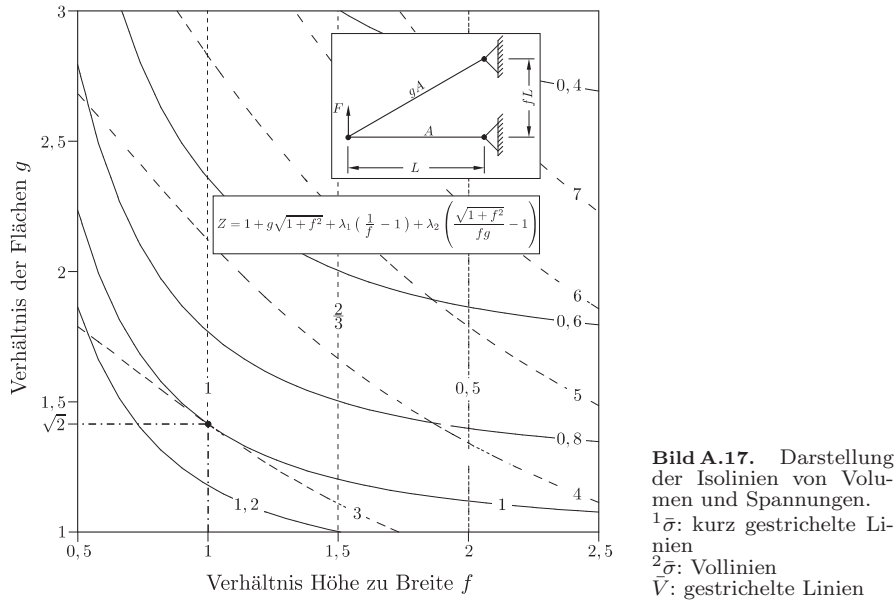
In Bild A.16 ist der Fall  $\hat{v} = 1$  aufgeführt. Die durchgezogenen Linien geben Kurven gleicher Verformung  $\bar{v}$  wieder, die gestrichelten Linien Kurven gleichen Volumens  $\bar{V}$ . Die Lösung liegt bedingt durch die Gleichungsnebenbedingung auf der Kurve  $\bar{v} = 1$ . Die optimale Lösung, d.h. die Lösung mit dem kleinsten Volumen, ist in dem Punkt zu finden, in dem die Kurve  $\bar{V}$  die Kurve  $\bar{v} = 1$  tangiert. Daraus erhält man die optimalen Werte  $f = \sqrt{3}$  und  $g = 4$ .

⊗ **Minimierung des Volumens bei vorgegebener Spannung**

In dem Stabsystem nach Bild A.15 auf der S. 37 soll das Volumen der Stäbe minimiert werden und der Betrag der normierten Spannung in den Stäben einen Wert von  $\hat{\sigma}$  annehmen. Diese Forderung lässt sich mit Hilfe der Lagrange'schen Multiplikatoren  $\lambda_1, \lambda_2$  wie folgt in einer Zielfunktion  $Z$  formulieren:

$$Z = 1 + g\sqrt{1 + f^2} + \lambda_1 \left( \frac{1}{f} - \hat{\sigma} \right) + \lambda_2 \left( \frac{\sqrt{1 + f^2}}{fg} - \hat{\sigma} \right) \quad (1189)$$

In dieser Zielfunktion tritt als erster Summand das normierte Volumen der Stäbe auf. Der Ausdruck bei  $\lambda_1$  ( $\lambda_2$ ) beschreibt die Spannungen im Stab 1 (2).  $^1\bar{\sigma} = 1/f$  ist die normierte Spannung im Element 1, und  $^2\bar{\sigma} = \sqrt{1 + f^2}/(fg)$



ist die normierte Spannung im Element 2. Zur Bildung des Minimums von (1189) müssen die partiellen Ableitungen nach  $f, g, \lambda_1$  und  $\lambda_2$  gebildet werden:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Z}{\partial f} &= \frac{fg}{\sqrt{1+f^2}} - \lambda_1 \frac{1}{f^2} + \lambda_2 \left( \frac{1}{g\sqrt{1+f^2}} - \frac{\sqrt{1+f^2}}{f^2g} \right) = 0 \\
 \frac{\partial Z}{\partial g} &= \sqrt{1+f^2} - \lambda_2 \frac{\sqrt{1+f^2}}{fg^2} = 0 \\
 \frac{\partial Z}{\partial \lambda_1} &= \frac{1}{f} - \hat{\sigma} = 0 \\
 \frac{\partial Z}{\partial \lambda_2} &= \frac{\sqrt{1+f^2}}{fg} - \hat{\sigma} = 0
 \end{aligned} \tag{1190}$$

Die Lösung von (1190) führt zu folgenden Werten:

$$f = \frac{1}{\hat{\sigma}}; \quad g = \frac{\sqrt{1+\hat{\sigma}^2}}{\hat{\sigma}}; \quad \lambda_1 = -\frac{\hat{\sigma}^2 - 1}{\hat{\sigma}^3}; \quad \lambda_2 = \frac{1 + \hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^3} \tag{1191}$$

Für  $\hat{\sigma} = 1$  sind in Bild A.17 Kurven gleichen Volumens und gleicher Spannung dargestellt. Die optimale Lösung liegt im Schnittpunkt der Kurven der Spannungen  $^1\bar{\sigma} = ^2\bar{\sigma} = \hat{\sigma} = 1$ . Durch diesen Punkt verläuft die Kurve mit  $\bar{V} = 3$ . Es ergeben sich daraus die Verhältnisse  $f = 1$  und  $g = \sqrt{2}$ .

► **A.5.13 Stabbeispiel XIII (FEM\_GEN und FEM\_CAS)**

136

Die vertikale Auflagerkraft für das rechte Auflager ergibt sich aus der „FEM\_CAS“-Rechnung zu:

$$F_r = mr\omega^2 \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos(\omega t) \right) \sin(\omega t) - \left( \frac{3}{4} + 2\cos(\omega t) \right) \cos(\omega t) \right] \quad (1192)$$

Mit  $\alpha = \omega t$  und durch das Einführen einer dimensionslosen Kraft  $\bar{F}_r$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{F}_r &= \frac{F_r}{mr\omega^2} \\ &= 1 - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\cos(\alpha) \right) \sin(\alpha) - \left( \frac{3}{4} + 2\cos(\alpha) \right) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (1193)$$

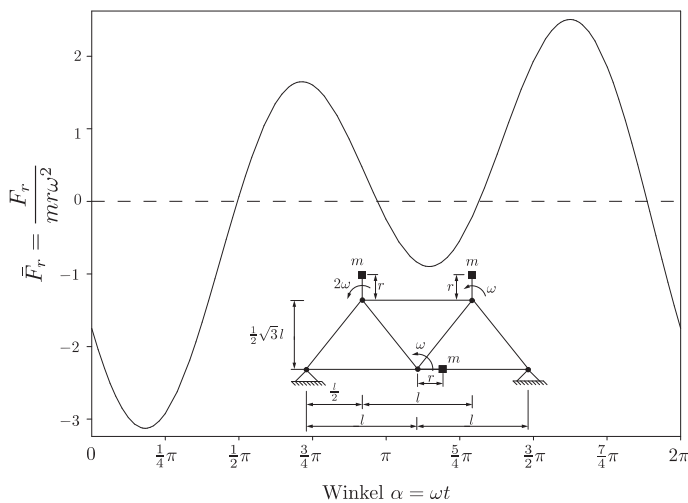


Bild A.18. Bezogene vertikale Auflagerkraft am rechten Lager

In Bild A.18 ist der Verlauf von (1193) im Intervall  $[0, 2\pi]$  dargestellt. Es treten vier Nullstellen auf, die folgende Werte aufweisen:

$$\alpha_1 = 1,5550; \alpha_2 = 3,0478; \alpha_3 = 4,1315; \alpha_4 = 5,9267 \quad (1194)$$

Zur Ermittlung der Extremwerte wird die Ableitung von (1193) benötigt:



$$\frac{d\bar{F}_r}{d\alpha} = 2\sqrt{3} + \left(\frac{3}{4} + 4\cos(\alpha)\right)\sin(\alpha) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{3} + 4\sqrt{3}\cos(\alpha)\right)\cos(\alpha) \quad (1195)$$

Daraus ergeben sich folgende Nullstellen:

$$\alpha_I = 0,5711; \alpha_{II} = 2,2425; \alpha_{III} = 3,6022; \alpha_{IV} = 5,1033 \quad (1196)$$

An diesen Nullstellen treten folgende Funktionswerte auf:

$$-3,1263 \text{ bei } \alpha_I; 1,6493 \text{ bei } \alpha_{II}; -0,8976 \text{ bei } \alpha_{III}; 2,5068 \text{ bei } \alpha_{IV} \quad (1197)$$

Die betragsgrößte vertikale Auflagerkraft von 3,126 tritt damit an der Stelle  $\alpha = 32,72^\circ$  auf.



## A.6 Eindimensionale Balkenprobleme

A.6

### ➤ A.6.1 Balkenbeispiel I

163

#### ⊗ Elementsteifigkeitsmatrix

Der Balken wird durch ein Element approximiert. Der E-Modul und das Flächenträgheitsmoment werden zu 1 angenommen.

Die Steifigkeitsmatrix des eindimensionalen Balkens wird nach (401) auf der S. 151 berechnet:

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \quad (1198)$$

#### ⊗ Gesamtsteifigkeitsmatrix

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist identisch mit der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_1$ , da der Balken nur durch ein Element dargestellt wird.

#### ⊗ Verformungen

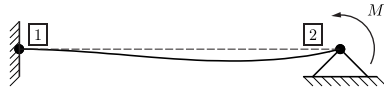
Die Knotenverformungen ergeben sich aus der Beziehung  $\underline{K} \vec{u} = \vec{F}$ . Der Verformungsvektor  $\vec{u}$  enthält die Verschiebungen und Verdrehungen der beiden Knoten. Die rechte Seite  $\vec{F}$  erfasst die äußeren Lasten, die aus Kräften und Momenten an den beiden Knoten bestehen können. Im vorliegenden Fall existiert für Knoten 2 eine Belastung in Form eines Momentes  $M = 1$ , das um die positive  $z$ -Achse dreht.

Die geometrischen Randbedingungen bestehen aus der festen Einspannung auf der linken Seite des Balkens und dem Stützlager auf der rechten Seite. Die feste Einspannung führt zu:  $v_1 = \varphi_1 = 0$ . Das rechte Auflager verhindert eine Durchbiegung am Knoten 2:  $v_2 = 0$ . Damit werden die ersten drei Zeilen und Spalten in dem nachstehenden Gleichungssystem gestrichen:

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R F_1 \\ {}^R M_1 \\ {}^R F_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1199)$$

Es bleibt eine Gleichung für die Verdrehung  $\varphi_2$  übrig:

$$4 \varphi_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{1}{4} \quad (1200)$$



**Bild A.19.** Biegelinie des Balkens über die Formfunktionen berechnet

Die Verformungen im Inneren des Elementes lassen sich über die Formfunktionen nach (386) auf der S. 146 berechnen. Setzt man in diese Beziehung die Verformungen der beiden Knoten ein, so verschwinden die Formfunktionen  $N_1, N_2$  und  $N_3$ . Übrig bleibt  $N_4$ , da  $\varphi_2$  ungleich Null ist:

$$v = \frac{1}{4}x \left[ \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{x}{l} \right] \quad (1201)$$

Die Auswertung dieser Gleichung ist in Bild A.19 dargestellt. Die gestrichelte Linie zeigt den Balken im unverformten Zustand. Die durchgezogene Linie gibt die Biegelinie nach voranstehender Gleichung wieder.

#### ⊗ Auflagerreaktion

Mit den bekannten Verformungen können die Auflagerreaktionen über das Produkt  $\underline{K} \vec{u} = \vec{F}$  berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} 12 & 6 & -12 & 6 \\ 6 & 4 & -6 & 2 \\ -12 & -6 & 12 & -6 \\ 6 & 2 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{F_1} \\ R_{M_1} \\ R_{F_2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1202)$$

Bei der Multiplikation der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}$  mit dem Verformungsvektor  $\vec{u}$  ist von der Gesamtsteifigkeitsmatrix nur die letzte Spalte von Bedeutung, da die ersten drei Elemente des Verformungsvektors Null sind.

$$\begin{bmatrix} R_{F_1} \\ R_{M_1} \\ R_{F_2} \\ R_{M_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1203)$$

Die Reaktionsgröße  ${}^R M_2$  stellt sich als die äußere Belastung  $M = 1$  dar. Das Bild A.20 zeigt die grafische Auswertung der Auflagerreaktionen. Sie sind im  $(x, y, z)$ -Koordinatensystem beschrieben, woraus sich die entsprechenden Vorzeichen ergeben. Das Vorzeichen für die Verdrehung bzw. das Moment ergibt sich aus der Richtung der  $z$ -Achse, die hier aus der Zeichenebene heraus zeigt. Beide sind positiv, wenn sie um die positive  $z$ -Achse drehen.



Bild A.20. Auflagerreaktionen des Balkens

### ⊗ Gleichgewichtskontrolle

Die äußeren Kräfte des Systems müssen im Gleichgewicht stehen:

$$\sum_i F_i = 0 ; \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad (1204)$$

$$\sum_i M_i = 0 ; \quad \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} \cdot 1 = 0 \quad (1205)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen sind also erfüllt.

### ➤ A.6.2 Balkenbeispiel II

In Bild 6.9 auf der S. 155 ist ein Balken mit Streckenlast dargestellt. Dessen Ergebnisse sollen durch eine Erhöhung der Elementanzahl verbessert werden.

164

### ⊗ Elementsteifigkeitsmatrizen

Die Beschreibung der Steifigkeitsmatrix ist in (401) auf der S. 151 zu finden:

Zwei Elemente:

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = 8 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 96 & 12l & -96 & 12l \\ 12l & 2l^2 & -12l & l^2 \\ -96 & -12l & 96 & -12l \\ 12l & l^2 & -12l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (1206)$$

Drei Elemente:

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = \underline{K}_3 = 12 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 216 & 18l & -216 & 18l \\ 18l & 2l^2 & -18l & l^2 \\ -216 & -18l & 216 & -18l \\ 18l & l^2 & -18l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (1207)$$

⊗ **Belastungen**

Die Belastung besteht in Form einer Streckenlast. Diese muß nach (407) auf der S. 152 in Knotenkräfte und Knotenmomente umgerechnet werden. Die rechte Seite  $\vec{F}$  im Gleichungssystem  $\underline{K} \vec{u} = \vec{F}$  setzt sich aus der Überlagerung der einzelnen Knotenbelastungen zusammen.

Zwei Elemente:

$${}^1\vec{F} = {}^2\vec{F} = q \frac{l}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{24} \\ 1 \\ -\frac{l}{24} \end{bmatrix} \quad (1208)$$

$$\vec{F} = {}^1\vec{F} + {}^2\vec{F} = q \frac{l}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{24} \\ 1 \\ -\frac{l}{24} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \frac{l}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{l}{24} \\ 1 \\ -\frac{l}{24} \end{bmatrix} = q \frac{l}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{24} \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{l}{24} \end{bmatrix} \quad (1209)$$

Drei Elemente:

$${}^1\vec{F} = {}^2\vec{F}_2 = {}^3\vec{F}_3 = q \frac{l}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{36} \\ 1 \\ -\frac{l}{36} \end{bmatrix} \quad (1210)$$

$$\vec{F} = {}^1\vec{F}_1 + {}^2\vec{F}_2 + {}^3\vec{F}_3 = q \frac{l}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{36} \\ 1 \\ -\frac{l}{36} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \frac{l}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{l}{36} \\ 1 \\ -\frac{l}{36} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + q \frac{l}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{l}{36} \\ 1 \\ -\frac{l}{36} \end{bmatrix} = q \frac{l}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{l}{36} \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{l}{36} \end{bmatrix} \quad (1211)$$

### ⊗ Verformungen

Die Ausnutzung der Symmetrie des Balkens führt auf die Randbedingung:  $\varphi_1=0$ . Das rechte Auflager hat die Randbedingung  $v_3=0$  bei zwei Elementen und  $v_4=0$  bei drei Elementen zur Folge. Daraus ergibt sich, daß jeweils aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix die erste und vorletzte Zeile und Spalte gestrichen werden. Damit ergeben sich folgende Gleichungssysteme zur Bestimmung der Verformungen:

Zwei Elemente:

$$8 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 96 & -96 & 12l & 0 \\ -96 & 192 & 0 & 12l \\ 12l & 0 & 4l^2 & l^2 \\ 0 & 12l & l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = q \frac{l}{8} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{l}{24} \end{bmatrix} \quad (1212)$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = q \frac{l^3}{8 EI} \begin{bmatrix} \frac{5}{48} l \\ \frac{19}{256} l \\ -\frac{11}{48} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (1213)$$

Drei Elemente:

$$12 \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 216 & -216 & 18l & 0 & 0 & 0 \\ -216 & 432 & 0 & -216 & 18l & 0 \\ 18l & 0 & 4l^2 & -18l & l^2 & 0 \\ 0 & -216 & -18l & 432 & 0 & 18l \\ 0 & 18l & l^2 & 0 & 4l^2 & l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 18l & l^2 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = q \frac{l}{12} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ -\frac{l}{36} \end{bmatrix} \quad (1214)$$

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \frac{q l^3}{31104 EI} \begin{bmatrix} 405 l \\ 352 l \\ -624 \\ 205 l \\ -1104 \\ -1296 \end{bmatrix} \quad (1215)$$

⊗ **Schnittgrößen**

Die Schnittgrößen ergeben sich aus dem Produkt  $\underline{K}_i {}^i \vec{u} = {}^i \vec{F}$



Zwei Elemente:

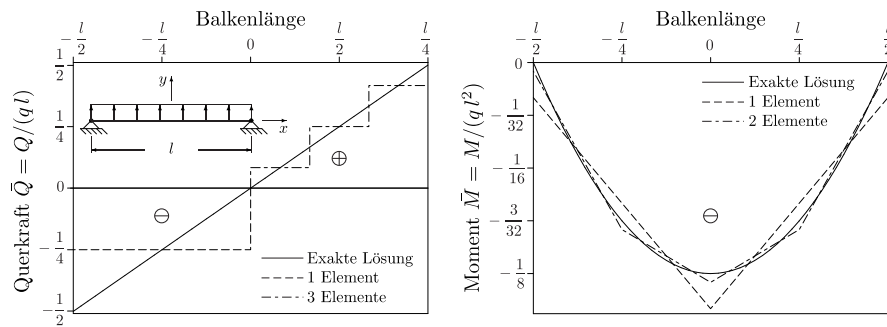
$$\underline{K}_1 {}^1\vec{u} = {}^1\vec{F} = \frac{ql}{192} \begin{bmatrix} 24 \\ -25l \\ 24 \\ -19l \end{bmatrix} \quad (1216)$$

$$\underline{K}_2 {}^2\vec{u} = {}^2\vec{F} = \frac{ql}{192} \begin{bmatrix} 72 \\ 19l \\ -72 \\ -l \end{bmatrix} \quad (1217)$$

Drei Elemente:

$${}^1\vec{F} = \frac{ql}{432} \begin{bmatrix} 36 \\ -55l \\ 36 \\ -49l \end{bmatrix}; \quad {}^2\vec{F} = \frac{ql}{432} \begin{bmatrix} 108 \\ -49l \\ 108 \\ -31l \end{bmatrix}; \quad {}^3\vec{F} = \frac{ql}{432} \begin{bmatrix} 180 \\ -31l \\ 180 \\ -l \end{bmatrix} \quad (1218)$$

### ➤ Schnittgrößenverläufe



**Bild A.21.** Bezoogene Querkraft- und Momentenverläufe für verschiedene Elementanzahlen

In der linken Hälfte von Bild A.21 ist der Querkraftverlauf für verschiedene Elementanzahlen dargestellt. Die durchgezogene Linie gibt die exakte Lösung  $\bar{Q} = Q/(ql) = x/l$  wieder. Für ein bzw. drei Elemente der rechten Hälfte des

Balkens ergeben sich die angeführten Verläufe. Die Lösung für ein Element ist für  $x/l \leq 0$  dargestellt. Die für drei Elemente für  $x/l \geq 0$ . Die FE-Lösung stellt sich als treppenförmiger Verlauf dar, da die Querkraft im zweiknotigen Element konstant ist.

In der rechten Bildhälfte von A.21 ist der Momentenverlauf für eine unterschiedliche Anzahl von Elementen angeführt. Die exakte Lösung stellt eine Parabel  $\bar{M} = M/(ql^2) = 1/2[(x/l)^2 - 1/4]$  dar. Bei zwei Elementen für die rechte Balkenhälfte ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung.

### ⊙ Konvergenztest

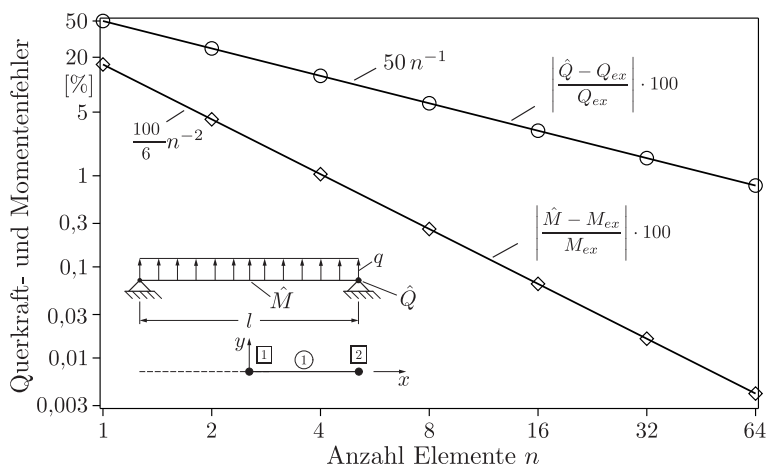


Bild A.22. Verläufe der Fehler in den Schnittgrößen für 1 bis 64 Elemente

In Bild A.22 sind die Verläufe der Fehler in den Schnittgrößen für 1 bis 64 Elemente angeführt. Während der Momentenfehler mit der Elementanzahl  $n$  quadratisch abfällt, nimmt der Querkraftfehler nur linear ab. So benötigt man 50 Elemente, um den Querkraftfehler auf 1% zu reduzieren.

### ⊙ A.6.3 Balkenbeispiel III

#### ⊙ Formfunktionen

Die in der Aufgabenstellung gegebene Ansatzfunktion lautet:

$$v = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (1219)$$

Diesem Ansatz muß die Bedingung des Gelenkes, nämlich  $v''(x=0) = 0$ , aufgeprägt werden:

$$\begin{aligned}
v' &= a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 \\
v'' &= 2 a_2 + 6 a_3 x \\
v''(x=0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0
\end{aligned} \tag{1220}$$

Damit ergibt sich eine modifizierte Ansatzfunktion und deren erste Ableitung zu:

$$\begin{aligned}
v &= a_0 + a_1 x + a_3 x^3 \\
v' &= a_1 + 3 a_3 x^2
\end{aligned} \tag{1221}$$

Interpolationsbedingungen:

$$v(x=0) = v_i \quad \Rightarrow \quad v_i = a_0 \tag{1222}$$

$$v(x=l) = v_j \quad \Rightarrow \quad v_j = v_i + a_1 l + a_3 l^3 \tag{1223}$$

$$v'(x=l) = \varphi_j \quad \Rightarrow \quad \varphi_j = a_1 + 3 a_3 l^2 \tag{1224}$$

Aus (1223) folgt:

$$a_1 = \frac{v_j - v_i - a_3 l^3}{l} \tag{1225}$$

Einsetzen in (1224):

$$\begin{aligned}
\varphi_j &= \frac{v_j - v_i - a_3 l^3}{l} + 3 a_3 l^2 = \frac{v_j - v_i}{l} + 2 a_3 l^2 \\
a_3 &= \frac{v_i - v_j}{2 l^3} + \frac{\varphi_j}{2 l^2}
\end{aligned} \tag{1226}$$

Einsetzen von (1226) in (1225) führt zu:

$$a_1 = \frac{v_j - v_i}{l} - l^2 \left( \frac{v_i - v_j}{2 l^3} + \frac{\varphi_j}{2 l^2} \right) = \frac{3(v_j - v_i)}{2 l} - \frac{\varphi_j}{2} \tag{1227}$$

Einsetzen von (1222), (1226) und (1227) in (1221):

$$v = v_i + \left( \frac{3(v_j - v_i)}{2 l} - \frac{\varphi_j}{2} \right) x + \left( -\frac{v_j - v_i}{2 l^3} + \frac{\varphi_j}{2 l^2} \right) x^3$$

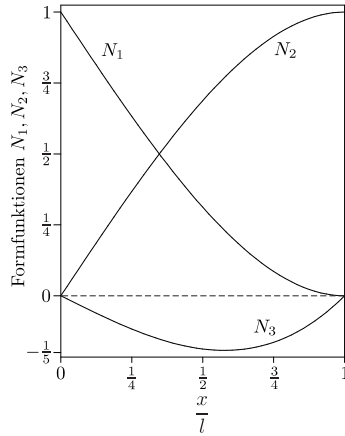
$$v = \underbrace{\left(1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3}\right)}_{N_1} v_i + \underbrace{\left(\frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{2l^3}\right)}_{N_2} v_j + \underbrace{\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2l^2}\right)}_{N_3} \varphi_j \quad (1228)$$

Die Formfunktionen aus (1228) lassen sich in Matrixform schreiben als:

$$v = \underbrace{\left[ 1 - \frac{3x}{2l} + \frac{x^3}{2l^3} \mid \frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{2l^3} \mid -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2l^2} \right]}_{\vec{N}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}}_{\vec{v}} \quad (1229)$$

$$= \vec{N}^T \vec{v}$$

Das Bild A.23 zeigt die grafische Auswertung der Formfunktionen.



**Bild A.23.** Die Formfunktionen des zweiknotigen Balkenelementes mit Gelenk

⊗ **Dehnungs-Verschiebungs-Beziehung**

Die zweiten Ableitungen von  $v''$  lassen sich über die Verformungen der Knoten ausdrücken:  $v'' = \vec{B}^T \vec{v}$ . Es muß dazu (1229) zweimal elementweise nach  $x$  abgeleitet werden:

$$v' = \left[ -\frac{3}{2l} + \frac{3x^2}{2l^3} \mid \frac{3}{2l} - \frac{3x^2}{2l^3} \mid -\frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2l^2} \right] \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix}$$

$$v'' = \left[ \begin{array}{c|c|c} 3\frac{x}{l^3} & -3\frac{x}{l^3} & 3\frac{x}{l^2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{bmatrix} = \vec{B}^T \vec{v} \quad (1230)$$

⊙ **Steifigkeitsmatrix des Elementes mit Gelenk**

Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus:  $\underline{K} = EI \int_0^l \vec{B} \vec{B}^T dx$

$$\begin{aligned} \underline{K} &= EI \int_0^l \begin{bmatrix} 3\frac{x}{l^3} \\ -3\frac{x}{l^3} \\ 3\frac{x}{l^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\frac{x}{l^3} & -3\frac{x}{l^3} & 3\frac{x}{l^2} \end{bmatrix} dx \\ &= 9EI \int_0^l \begin{bmatrix} \frac{x^2}{l^6} & -\frac{x^2}{l^6} & \frac{x^2}{l^5} \\ -\frac{x^2}{l^6} & \frac{x^2}{l^6} & -\frac{x^2}{l^5} \\ \frac{x^2}{l^5} & -\frac{x^2}{l^5} & \frac{x^2}{l^4} \end{bmatrix} dx = \frac{3EI}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & l \\ -1 & 1 & -l \\ l & -l & l^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1231)$$

Gleichung (1231) enthält die gesuchte Steifigkeitsmatrix.

In Bild A.24 sind die Freiheitsgrade, nämlich die Durchbiegung  $v_i$  im Anfangsknoten  $i$  sowie die Durchbiegung  $v_j$  und die Verdrehung  $\varphi_j$  im Endknoten  $j$ , dargestellt. Diesen Freiheitsgraden zugeordnet sind die Kräfte  $F_i, F_j$  und das Moment  $M_j$ .



**Bild A.24.** Freiheitsgrade und Belastungen des Balkens mit Gelenk

⊙ **Steifigkeitsmatrizen**

Das Element 1 soll kein Gelenk aufweisen und wird nach (401) auf der S. 151 berechnet:

$$\underline{K}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \\ \hline 12 & 6 & -12 & 6 \\ \hline 6 & 4 & -6 & 2 \\ \hline -12 & -6 & 12 & -6 \\ \hline 6 & 2 & -6 & 4 \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array} \quad (1232)$$

Das Element 2 weist am Anfangsknoten, der Knoten 2 in der Struktur ist, ein Gelenk auf. Nach (1231) ergibt sich:

$$\underline{K}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} v_2 & v_3 & \varphi_3 \\ \hline 1 & -1 & 1 \\ \hline -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} v_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array} \quad (1233)$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix wird durch Überlagerung der beiden Steifigkeitsmatrizen gewonnen. Die Anteile sind durch Klammersymbole gekennzeichnet: Element 1:  $[\dots]$ ; Element 2:  $\lceil \dots \rceil$ . Eine Überlappung der beiden Matrizen tritt nur bei dem Freiheitsgrad  $v_2$  auf ( $[12] + \lceil 1 \rceil$ ). Beim Freiheitsgrad  $\varphi_2$  tritt kein Anteil von Element 2 auf, da von diesem Element im Anfangsknoten kein Moment übertragen werden kann, so wie es das Gelenk fordert.

$$\underline{K}_g = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|cc} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 & v_3 & \varphi_3 \\ \hline [12] & [6] & [-12] & [6] & 0 & 0 \\ \hline [6] & [4] & [-6] & [2] & 0 & 0 \\ \hline [-12] & [-6] & [12] + \lceil 1 \rceil & [-6] & \lceil -1 \rceil & \lceil 1 \rceil \\ \hline [6] & [2] & [-6] & [4] & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lceil -1 \rceil & 0 & \lceil 1 \rceil & \lceil -1 \rceil \\ \hline 0 & 0 & \lceil 1 \rceil & 0 & \lceil -1 \rceil & \lceil 1 \rceil \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array} \quad (1234)$$

⊗ **Verformungen**

Die Randbedingungen  $v_1 = \varphi_1 = v_3 = \varphi_3 = 0$  haben zur Folge, daß in der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  die Zeilen und Spalten 1, 2, 5, 6 gestrichen werden. Daraus ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Verformungen  $v_2, \varphi_2$ .

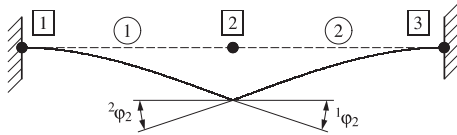
$$\left[ \begin{array}{c|c} 13 & -6 \\ \hline -6 & 4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} -1 \\ 0 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{8} \end{array} \right] \quad (1235)$$

Die Verdrehung  $\varphi_2$  ist dem Element 1 zuzuordnen, so daß sie im folgenden als  $^1\varphi_2$  geschrieben wird. Am Knoten 2 tritt eine Unstetigkeit in der Verdrehung  $\varphi$  auf. Während vom Element 1 kommend der Winkel  $^1\varphi_2$  auftritt, tritt vom Element 2 kommend der Winkel  $^2\varphi_2$  auf. Dieser läßt sich nach (1230) auf der S. 53 berechnen. Für  $x = 0$  gilt:

$$^2\varphi_2 = v'(x=0) = \left[ -\frac{3}{2l} \mid \frac{3}{2l} \mid -\frac{1}{2} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{array} \right] \quad (1236)$$

Darüber erhält man den Winkel  $^2\varphi_2$  als:

$$^2\varphi_2 = -\frac{3}{2l} v_2 = -\frac{3}{2} \left( -\frac{1}{4} \right) = \frac{3}{8} \quad (1237)$$



**Bild A.25.** Verformungen des zweiseitig eingespannten Balkens

Das Bild A.25 zeigt die Verformungen der beiden Balken. Bedingt durch das Gelenk in der Mitte tritt an dieser Stelle die schon angesprochene Unstetigkeit in der Neigung der Balken auf. Aus Gründen der Symmetrie ist  $^1\varphi_2 = -^2\varphi_2$ .

⊗ **A.6.4 Balkenbeispiel IV**

Der eindimensionale Balken wird in drei Elemente der Länge  $l$  eingeteilt.

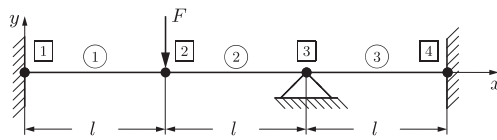


Bild A.26. Eindimensionale Balkenstruktur

⊙ **Steifigkeitsmatrizen**

Die drei Elemente weisen, da gleiche Längen und Querschnitte vorliegen, identische Steifigkeitsmatrizen auf. Es wird das eindimensionale Balkenelement verwendet.

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = \underline{K}_3 =$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} v_1, v_2, v_3 & \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 & v_2, v_3, v_4 & \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \\ \hline \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1, v_2, v_3 \\ \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \\ v_2, v_3, v_4 \\ \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \end{array} \end{array}$$

(1238)

Die Spalten und Zeilen sind mit den Freiheitsgraden der entsprechenden Elemente gekennzeichnet.

⊙ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

$$\underline{K}_g = \frac{EI}{l^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 & v_3 & \varphi_3 & v_4 & \varphi_4 \\ \hline \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{array} \end{array} \quad (1239)$$



Die Gesamtsteifigkeitsmatrix weist eine deutliche Bandstruktur auf. Die halbe Bandbreite  $b$  ergibt sich als  $(\Delta n + 1) f$ . Dabei ist  $\Delta n$  die maximale Knotendifferenz in einem Element, hier  $= 1$ .  $f$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten, also hier 2. Daraus ergibt sich die Bandbreite zu  $b = 4$ .

⑤ **Einbringen der Randbedingungen**

Die Durchbiegungen  $v_1$ ,  $v_3$  und  $v_4$  sind bedingt durch die Lager Null. Ebenso die Verdrehungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_4$ . Daher werden die entsprechenden Zeilen und Spalten in der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  gestrichen.

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & 6l \\ 0 & 8l^2 & 2l^2 \\ 6l & 2l^2 & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1240)$$

⑤ **Verformungen**

Die Lösung des Gleichungssystems nach (1240) führt auf folgende Verformungen:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \frac{Fl^2}{96EI} \begin{bmatrix} -5l \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1241)$$

⑤ **Durchbiegung an der Stelle  $x = l/2$**

Mit der Formfunktion nach (386) auf der S. 146 läßt sich an einer beliebigen Stelle  $x$  die Durchbiegung berechnen. Die Stelle  $x = l/2$  liegt im Element 1, so daß über die Beziehung  $v = \vec{N}^1 \vec{v}$  die Durchbiegung berechnet werden kann. Der Vektor  ${}^1\vec{v}$  enthält die Verformungen des Elementes 1 ( $\xi = x/l$ ):

$${}^1\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \frac{Fl^2}{96EI} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -5l \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1242)$$

$$v = \xi^2 (3 - 2\xi) v_2 + \xi^2 l (-1 + \xi) \varphi_2$$

$$v \left( \xi = \frac{1}{2} \right) = -\frac{19}{768} \frac{Fl^3}{EI} \quad (1243)$$

⊗ **Verdrehung an der Stelle  $x = l/2$**

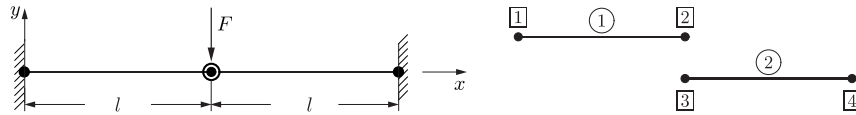
Die Verdrehung in einem Element  $i$  erhält man über die Formfunktion:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{d}{dx} \vec{N}^T i \vec{v} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} \vec{N}^T i \vec{v} \\ \varphi &= \frac{6}{l} \xi (1 - \xi) v_2 + \xi (-2 + 3\xi) \varphi_2 = \frac{F l^2}{96 EI} \xi (-28 + 27 \xi) \\ \varphi(\xi = \tfrac{1}{2}) &= -\frac{29}{384} \frac{F l^2}{EI}\end{aligned}\quad (1244)$$

⊗ **A.6.5 Balkenbeispiel V**

Der Balken wird, wie in der rechten Hälfte von Bild A.27 dargestellt, in zwei eindimensionale Balkenelemente sowie in einen eindimensionalen Stab eingeteilt. Dieser verbindet die Knoten 2 und 3 miteinander.

165



**Bild A.27.** Ein zweiseitig eingespannter Balken mit Gelenk und sein Ersatzmodell

Die Tab. A.5 erfasst die Elementknotenzuordnung sowie den jeweiligen Elementtyp.

**Tabelle A.5.** Elementknotenzuordnung

Element	Knoten 1	Knoten 2	Elementtyp
1	1	2	Balken
2	3	4	Balken
3	2	3	Stab

⊗ **Elementsteifigkeitsmatrizen**

Es werden folgende Abkürzungen eingeführt:  $f = EI/l^3$  und  $k = AE/l$ :

$$\underline{K}_1 = f \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{array} \right] \begin{array}{c} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array} ; \underline{K}_2 = f \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} v_3 & \varphi_3 & v_4 & \varphi_4 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 4 & 2l & -4 & 2l \\ 2l & \frac{4}{3}l^2 & -2l & \frac{2}{3}l^2 \\ -4 & -2l & 4 & -2l \\ 2l & \frac{2}{3}l^2 & -2l & \frac{4}{3}l^2 \end{array} \right] \begin{array}{c} v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{array} \end{array} \quad (1245)$$

$$\underline{K}_3 = k \begin{array}{c} \begin{array}{c|c} v_2 & v_3 \end{array} \\ \left[ \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{c} v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \quad (1246)$$

② **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

In der nachfolgenden Matrix sind die geometrischen Randbedingungen berücksichtigt, d.h. die ersten und letzten beiden Zeilen sind gestrichen worden. Damit ergibt sich folgendes System:

$$\hat{\underline{K}}_g \vec{u} = f \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 12 + \frac{k}{f} & -6l & -\frac{k}{f} & 0 \\ -6l & 4l^2 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{f} & 0 & 4 + \frac{k}{f} & 2l \\ 0 & 0 & 2l & \frac{4}{3}l^2 \end{array} \right] \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c} -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \end{array} \quad (1247)$$

Die Inversion der Matrix  $\hat{\underline{K}}_g$  führt zu:

$$\hat{\underline{K}}_g^{-1} = \frac{1}{l^2(3f + 4k)} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} l^2 \left(1 + \frac{k}{f}\right) & \frac{3}{2}l \left(1 + \frac{k}{f}\right) & l^2 \frac{k}{f} & -\frac{3}{2}l \frac{k}{f} \\ \frac{3}{2}l \left(1 + \frac{k}{f}\right) & 3 + \frac{13}{4} \frac{k}{f} & \frac{3}{2}l \frac{k}{f} & -\frac{9}{4} \frac{k}{f} \\ l^2 \frac{k}{f} & \frac{3}{2}l \frac{k}{f} & l^2 \left(3 + \frac{k}{f}\right) & -\frac{3}{2}l \left(3 + \frac{k}{f}\right) \\ -\frac{3}{2}l \frac{k}{f} & -\frac{9}{4} \frac{k}{f} & -\frac{3}{2}l \left(3 + \frac{k}{f}\right) & 9 + \frac{21}{4} \frac{k}{f} \end{array} \right] \end{array} \quad (1248)$$

Die Durchbiegungen  $v_2$  und  $v_3$  müssen identisch sein. Das hat zur Folge, daß die Steifigkeit  $k$  des Stabelementes gegen unendlich strebt. Bilden des Grenzwertes  $k \rightarrow \infty$  für jedes Element von (1248) führt auf:

$$\underline{\tilde{K}}_g^{-1} = \frac{1}{16 f l^2} \begin{bmatrix} 4l^2 & 6l & 4l^2 & -6l \\ 6l & 13 & 6l & -9 \\ 4l^2 & 6l & 4l^2 & -6l \\ -6l & -9 & -6l & 21 \end{bmatrix} \quad (1249)$$

$\underline{\tilde{K}}_g^{-1}$  ist eine Nachgiebigkeitsmatrix. Durch Multiplikation mit dem Lastvektor ergeben sich für die Verformungen:

$$\underline{\tilde{K}}_g^{-1} \vec{F} = \frac{1}{16 f l^2} \begin{bmatrix} 4l^2 & 6l & 4l^2 & -6l \\ 6l & 13 & 6l & -9 \\ 4l^2 & 6l & 4l^2 & -6l \\ -6l & -9 & -6l & 21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} \quad (1250)$$

$$= \frac{1}{8} \frac{F l^2}{EI} \begin{bmatrix} -2l \\ -3 \\ -2l \\ 3 \end{bmatrix} \quad (1251)$$

Das Ergebnis stimmt mit der Lösung über eine Zwangsbedingung in (432) auf der S. 163 überein. Ebenso mit der Lösung eines Balkenelementes mit einem Gelenk nach (1235) auf der S. 55 mit  $F = l = E = I = 1$ .

#### ⊗ Erforderliche Rechengenauigkeit

Steigert man in (1247) die Steifigkeit  $k$  sukzessiv, so führt dies zu einem schlecht konditionierten Gleichungssystem. Nach (126) auf der S. 53 lassen sich die erforderlichen Stellen hinter dem Komma berechnen als:

$$s = p - \log \left( \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right) \quad (1252)$$

Die Größe  $p$  beschreibt die Anzahl Stellen hinter dem Komma, die in der Rechnung mitgeführt werden.  $s$  ist die Anzahl korrekter Dezimalstellen hin-

ter dem Komma.  $\lambda_{\max}$  ist der größte und  $\lambda_{\min}$  der kleinste Eigenwert der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\hat{\underline{K}}_g$ .

**Tabelle A.6.** Die Eigenwerte in Abhängigkeit von der Steifigkeit  $k$

$k$	$\lambda_{\max}$	$\lambda_{\min}$	$p$
1	16,074	0,388	2
$10^3$	$2,008 \cdot 10^3$	0,492	4
$10^6$	$2,000 \cdot 10^6$	0,492	7
$10^{12}$	$2,000 \cdot 10^{12}$	0,492	13

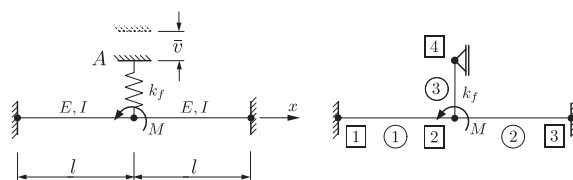
In der Tab. A.6 sind für verschiedene Werte  $k$  ( $f = l = 1$ ) die Eigenwerte  $\lambda_{\max}$  und  $\lambda_{\min}$  von  $\underline{K}_g$  aufgeführt. Zudem ist in der letzten Spalte die Anzahl  $p$  der Stellen angeführt, die bei der Rechnung hinter dem Komma geführt werden müssen, damit  $s = 2$  signifikante Stellen hinter dem Komma erhalten bleiben. Die Eigenwerte wurden mit 20 Stellen hinter dem Komma berechnet. Bei einem Wert von  $k = 10^{12}$  ist die Grenze mit 14 Stellen hinter dem Komma erreicht, die ein Rechner mit 32 bit Wortlänge verwirklichen kann.

### ➤ A.6.6 Balkenbeispiel VI

165

#### ➤ Einteilung der Struktur in Elemente

Der Balken wird in zwei eindimensionale Balkenelemente eingeteilt. Die Feder wird über einen eindimensionalen Stab abgebildet.



**Bild A.28.** Einteilung der eindimensionalen Balkenstruktur in Elemente

#### ➤ Einzelsteifigkeitsmatrizen

Die Steifigkeitsmatrizen der Elemente 1 und 2 sind identisch und entsprechen dem des eindimensionalen Balkens. Durch  $\underline{K}_3$  wird die Feder beschrieben.

$$\underline{K}_1 = \underline{K}_2 = \underbrace{\frac{EI}{l^3}}_{k_f} \begin{array}{c|c|c|c} v_1/v_2 & \varphi_1/\varphi_2 & v_2/v_3 & \varphi_2/\varphi_3 \\ \hline 12 & 6l & -12 & 6l \\ \hline 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \hline -12 & -6l & 12 & -6l \\ \hline 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{array} \begin{array}{l} v_1/v_2 \\ \varphi_1/\varphi_2 \\ v_2/v_3 \\ \varphi_2/\varphi_3 \end{array} \quad (1253)$$

$$\underline{K}_3 = k_f \begin{array}{c|c} v_2 & v_4 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} v_2 \\ v_4 \end{array} \quad (1254)$$

⊙ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Das System hat sieben Freiheitsgrade, so daß die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  eine  $7 \times 7$  Matrix ist. Durch Überlagerung von  $\underline{K}_1$ ,  $\underline{K}_2$  und  $\underline{K}_3$  erhält man:

$$\underline{K}_g = k_f \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 & v_3 & \varphi_3 & v_4 \\ \hline [12] & [6l] & [-12] & [6l] & 0 & 0 & 0 \\ \hline [6l] & [4l^2] & [-6l] & [2l^2] & 0 & 0 & 0 \\ \hline [-12] & [-6l] & [12] + [12] + \langle 1 \rangle & [-6l] + [6l] & [-12] & [6l] & \langle -1 \rangle \\ \hline [6l] & [2l^2] & [-6l] + [6l] & [4l^2] + [4l^2] & [-6l] & [2l^2] & 0 \\ \hline 0 & 0 & [-12] & [-6l] & [12] & [-6l] & 0 \\ \hline 0 & 0 & [6l] & [2l^2] & [-6l] & [4l^2] & 0 \\ \hline 0 & 0 & \langle -1 \rangle & 0 & 0 & 0 & \langle 1 \rangle \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \end{array} \quad (1255)$$

Die Symbole  $[ \ ]$ ,  $[ \ ]$  und  $\langle \ \rangle$  besagen, daß die entsprechenden Anteile von den Elementen 1, 2 bzw. 3 stammen.

Bedingt durch die Lagerung der Struktur gilt:  $v_1 = \varphi_1 = v_3 = \varphi_3 = 0$ . Damit können aus  $\underline{K}_g$  die entsprechenden Zeilen und Spalten gestrichen werden und man erhält  $\hat{\underline{K}}_g$  zu:

$$\underline{\hat{K}}_g = k_f \begin{array}{c|c|c} v_2 & \varphi_2 & v_4 \\ \hline 25 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 8l^2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} v_2 \\ \varphi_2 \\ v_4 \end{array} \quad (1256)$$

⊗ **Die Verformungen des Systems**

Mit Hilfe von  $\underline{\hat{K}}_g$  aus (1256) und der Randbedingung  $v_4 = \bar{v}$  erhält man das Gleichungssystem  $\underline{\hat{K}}_g \vec{v} = \vec{F}$  zur Bestimmung der Verformungen:

$$k_f \begin{array}{c|c|c} 25 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 8l^2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \\ \bar{v} \end{array} = \begin{array}{c} 0 \\ M \\ R_{F_{y_4}} \end{array} \quad (1257)$$

Aus der ersten Zeile von (1257) ergibt sich:

$$k_f (25 v_2 - \bar{v}) = 0 \Rightarrow v_2 = \frac{\bar{v}}{25} \quad (1258)$$

Die zweite Zeile von (1257) führt auf:

$$k_f 8l^2 \varphi_2 = M \Rightarrow \varphi_2 = \frac{M}{8k_f l^2} \quad (1259)$$

⊗ **Auflagerreaktion im Lager A**

Die gesuchte Auflagerkraft erhält man aus der dritten Zeile von (1257):

$$k_f (-v_2 + \bar{v}) = R_{F_{y_4}} \Rightarrow R_{F_{y_4}} = \frac{24}{25} k_f \bar{v} \quad (1260)$$

⊗ **Alternativer Lösungsweg**

Es wird der Lösungsvektor  $\vec{v}$  aufgeteilt in  $\vec{v} = {}^0\vec{v} + \vec{\bar{v}}$ . Der Vektor  ${}^0\vec{v}$  enthält die bekannten Verformungen und  $\vec{\bar{v}}$  die unbekannten Verformungen:

$${}^0\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{v} \end{bmatrix} ; \vec{v} = \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1261)$$

Damit erhält man folgende Beziehung:

$$\underline{K}_g({}^0\vec{v} + \vec{v}) = \vec{F} \Rightarrow \underline{K}_g \vec{v} = \vec{F} - \underline{K}_g {}^0\vec{v} \quad (1262)$$

Die rechte Seite wird um den Vektor  $-\underline{K}_g {}^0\vec{v}$  erweitert:

$$\underline{K}_g {}^0\vec{v} = k_f \left[ \begin{array}{c|c|c} 25 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 8l^2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{v} \end{array} \right] = k_f \left[ \begin{array}{c} -\bar{v} \\ 0 \\ \bar{v} \end{array} \right] \quad (1263)$$

Das Gleichungssystem zur Ermittlung der unbekannten Verformungen lautet damit:

$$k_f \left[ \begin{array}{c|c|c} 25 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 8l^2 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \\ 0 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ M \\ {}^R F_{y_4} \end{array} \right] - k_f \left[ \begin{array}{c} -\bar{v} \\ 0 \\ \bar{v} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} k_f \bar{v} \\ M \\ {}^R F_{y_4} - k_f \bar{v} \end{array} \right] \quad (1264)$$

Hieraus kann die letzte Zeile und Spalte gestrichen werden, so daß man erhält:

$$k_f \left[ \begin{array}{c|c} 25 & 0 \\ \hline 0 & 8l^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} k_f \bar{v} \\ M \end{array} \right] \quad (1265)$$

Dies führt wie zuvor auf folgende Verformungen:

$$\left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{\bar{v}}{25} \\ \frac{M}{8k_f l^2} \end{array} \right] \quad (1266)$$



Aus der dritten Zeile von (1264) gewinnt man die gesuchte Auflagerreaktion  ${}^R F_{y_4}$ :

$$-k_f v_2 = {}^R F_{y_4} - \bar{v} k_f \quad (1267)$$

$${}^R F_{y_4} = \bar{v} k_f - k_f v_2 = k_f \left( \bar{v} - \frac{\bar{v}}{25} \right) = \frac{24}{25} \bar{v} k_f \quad (1268)$$

### ➤ A.6.7 Balkenbeispiel VII

177



**Bild A.29.** Zweiknotiges Element mit den dazugehörigen Freiheitsgraden und Randbedingungen

Die rechte Hälfte des Balkens in Bild 6.9 auf der S. 155 wird in ein Element eingeteilt. In Bild (A.29) ist dieses Element mit seinen Freiheitsgraden dargestellt. Am Knoten 1 ist aus Symmetriegründen  $\varphi_1=0$ . Am Knoten 2 verschwindet die Durchbiegung  $v_2$  und die Krümmung  $\varkappa_2$ , da gilt:  $M \sim \varkappa$ .

### ➤ Verformungen

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich aus (458) auf der S. 174 unter Berücksichtigung der wesentlichen Randbedingungen zu:

$$\frac{EI}{70 l^3} \begin{bmatrix} 9600 & 60 l^2 & 2400 l \\ 60 l^2 & 3 l^4 & 8 l^3 \\ 2400 l & 8 l^3 & 768 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(1)} & v_1^{(2)} \\ \varkappa_1^{(1)} & \varkappa_1^{(2)} \\ \varphi_2^{(1)} & \varphi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \frac{l}{2} & \frac{F}{2} \\ q \frac{l^3}{120} & 0 \\ -q \frac{l^2}{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (1269)$$

Die Streckenlast  $q$  auf der rechten Seite ist nach (460) auf der S. 175 in Knotengrößen umgerechnet worden. Der erste Lastfall bezieht sich auf die Streckenlast  $q$  und der zweite auf die Einzelkraft  $F$ . Die Verformungen lauten:

$$\begin{bmatrix} v_1^{(1)} \\ \varkappa_1^{(1)} \\ \varphi_2^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{q l^2}{384 EI} \begin{bmatrix} 5 l^2 \\ -48 \\ -16 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} v_1^{(2)} \\ \varkappa_1^{(2)} \\ \varphi_2^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{F l}{48 EI} \begin{bmatrix} l^2 \\ -12 \\ -3 l \end{bmatrix} \quad (1270)$$

Die Verformungen stimmen mit denen des zweiknotigen Elementes mit zwei Freiheitsgraden pro Knoten in (421) auf der S. 157 überein.

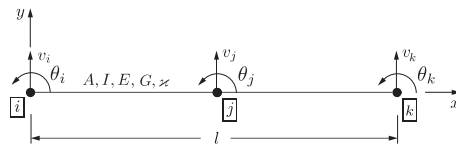
Die Schnittgrößen für den Lastfall 1 (Streckenlast) ergeben sich nach (461) auf der S. 175 zu:

$$\frac{q}{384l} \begin{bmatrix} -60 & -36l & -9l^2 & 60 & -24l & 3l^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -60 & -24l & -3l^2 & 60 & -36l & 9l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5l^2 \\ 0 \\ -48 \\ 0 \\ -16l \\ 0 \end{bmatrix} = ql \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ -l \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}{8} = \begin{bmatrix} {}^1Q_1^{(1)} \\ {}^1M_1^{(1)} \\ {}^1Q_2^{(1)} \\ {}^1M_2^{(1)} \end{bmatrix} \quad (1271)$$

Die Schnittgrößen  ${}^1\bar{M}_1^{(1)} = {}^1M_1^{(1)}/(ql^2) = -1/8$  und  ${}^1\bar{Q}_2^{(1)} = {}^1Q_2^{(1)}/(ql) = 1/2$  sind exakt (s. Tab. 6.1 auf der S. 158).

### ➤ A.6.8 Balkenbeispiel VIII

In Bild A.30 ist das dreiknotige Element nach Timoshenko dargestellt. Es weist pro Knoten die Durchbiegung  $v$  und die Verdrehung  $\theta$  als Freiheitsgrade auf. Die Größen  $A$ ,  $I$ ,  $E$  und  $\nu$  werden als konstant im Element vorausgesetzt.



**Bild A.30.** Freiheitsgrade des dreiknotigen Timoshenko-Balkens

Es wird eine quadratische Formfunktion nach (334) auf der S. 121 in Ansatz gebracht:

$$\begin{aligned} v &= N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k \\ \theta &= N_i \theta_i + N_j \theta_j + N_k \theta_k \end{aligned} \quad (1272)$$

Damit lassen sich die Dehnungen schreiben als (s. (473)) auf der S. 180:

$$\left[ \frac{\frac{d\theta}{dx}}{\frac{dv}{dx} - \theta} \right] = \left[ \frac{N'_i \theta_i + N'_j \theta_j + N'_k \theta_k}{N'_i v_i - N_i \theta_i + N'_j v_j - N_j \theta_j + N'_k v_k - N_k \theta_k} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & N'_i & 0 & N'_j & 0 & N'_k \\ \hline N'_i & -N_i & N'_j & -N_j & N'_k & -N_k \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \\ v_k \\ \theta_k \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \vec{B}_\varepsilon^T \\ \vec{B}_{\bar{\gamma}}^T \end{array} \right] \vec{v}$$

$$\vec{\varepsilon} = \underline{B} \vec{v} ; \quad \frac{d\theta}{dx} = \vec{B}_\varepsilon^T \vec{v} ; \quad \bar{\gamma} = \vec{B}_{\bar{\gamma}}^T \vec{v} \quad (1273)$$

⊗ **Biegesteifigkeitsmatrix**

Zur Bildung der Biegesteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_b$  müssen die Ableitungen der Formfunktionen aus (1272) gebildet werden.

$$\begin{aligned} N'_i &= \frac{dN_i}{dx} = \frac{dN_i}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} (1 - 3\xi + 2\xi^2) = \frac{1}{l} (-3 + 4\xi) \\ N'_j &= \frac{dN_j}{dx} = \frac{dN_j}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} (4\xi - 4\xi^2) = \frac{4}{l} (1 - 2\xi) \\ N'_k &= \frac{dN_k}{dx} = \frac{dN_k}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi} (-\xi + 2\xi^2) = \frac{1}{l} (-1 + 4\xi) \end{aligned} \quad (1274)$$

Daraus ergibt sich der Vektor  $\vec{B}_\varepsilon^T$  zu:

$$\vec{B}_\varepsilon^T = \frac{1}{l} \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & -3 + 4\xi & 0 & 4(1 - 2\xi) & 0 & -1 + 4\xi \end{array} \right] \quad (1275)$$

Nach (475) auf der S. 180 läßt sich die Biegesteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_b$  als Integration über das dyadische Produkt  $\vec{B}_\varepsilon \vec{B}_\varepsilon^T$  berechnen ( $E$  und  $I$  konstant im Element):

$$\underline{K}_b = EI l \frac{1}{l^2} \int_0^1 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -3 + 4\xi \\ 0 \\ 4(1 - 2\xi) \\ 0 \\ -1 + 4\xi \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 0 & -3 + 4\xi & 0 & 4(1 - 2\xi) & 0 & -1 + 4\xi \end{array} \right] d\xi =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{EI}{l} \int_0^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3+4\xi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3+4\xi)(4-8\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3+4\xi)(-1+4\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3+4\xi)(4-8\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (4-8\xi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (4-8\xi)(-1+4\xi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-3+4\xi)(-1+4\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (4-8\xi)(-1+4\xi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1+4\xi)^2 & 0 \end{bmatrix} d\xi \\
& = \frac{EI}{3l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & -8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 16 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -8 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad (1276)
\end{aligned}$$

⊗ **Schubsteifigkeitsmatrix**

Nach (478) auf der S. 181 erhält man die Schubsteifigkeitsmatrix, indem das Integral über das dyadische Produkt  $\vec{B}_{\bar{\gamma}} \vec{B}_{\bar{\gamma}}^T$  gebildet wird. Dazu werden die Formfunktionen und deren Ableitungen nach (1274) in  $\vec{B}_{\bar{\gamma}}$  eingesetzt:

$$\vec{B}_{\bar{\gamma}}^T = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 4\xi - 3 & (-1 + 3\xi - 2\xi^2)l & 4(1 - 2\xi) & 4l\xi(-1 + \xi) & 4\xi - 1 & (1 - 2\xi)\xi l \end{bmatrix} \quad (1277)$$

Damit erhält man für  $\underline{B}_{\bar{\gamma}} = \vec{B}_{\bar{\gamma}} \vec{B}_{\bar{\gamma}}^T$ :

$$\underline{B}_{\bar{\gamma}} = \frac{1}{l^2} \cdot \begin{bmatrix} (-3+4\xi)^2 & -l(-3+4\xi)(1-3\xi+2\xi^2) & (-3+4\xi)(4-8\xi) \\ -l(-3+4\xi)(1-3\xi+2\xi^2) & l^2(1-3\xi+2\xi^2)^2 & -l(1-3\xi+2\xi^2)(4-8\xi) \\ (-3+4\xi)(4-8\xi) & -l(1-3\xi+2\xi^2)(4-8\xi) & (4-8\xi)^2 \\ -l(-3+4\xi)(4\xi-4\xi^2) & l^2(1-3\xi+2\xi^2)(4\xi-4\xi^2) & -l(4-8\xi)(4\xi-4\xi^2) \\ (-3+4\xi)(-1+4\xi) & -l(1-3\xi+2\xi^2)(-1+4\xi) & (4-8\xi)(-1+4\xi) \\ -l(-3+4\xi)(-\xi+2\xi^2) & (1-3\xi+2\xi^2)(-\xi+2\xi^2) & -l(4-8\xi)(-\xi+2\xi^2) \\ -l(-3+4\xi)(4\xi-4\xi^2) & (-3+4\xi)(-1+4\xi) & -l(-3+4\xi)(-\xi+2\xi^2) \\ (1-3\xi+2\xi^2)(4\xi-4\xi^2)l^2 & -l(1-3\xi+2\xi^2)(-1+4\xi) & l^2(1-3\xi+2\xi^2)(-\xi+2\xi^2) \\ -l(4-8\xi)(4\xi-4\xi^2) & (4-8\xi)(-1+4\xi) & -l(4-8\xi)(-\xi+2\xi^2) \\ (4\xi-4\xi^2)^2l^2 & -l(4\xi-4\xi^2)(-1+4\xi) & (4\xi-4\xi^2)(-\xi+2\xi^2) \\ -l(4\xi-4\xi^2)(-1+4\xi) & (-1+4\xi)^2 & -l(-1+4\xi)(-\xi+2\xi^2) \\ (4\xi-4\xi^2)(-\xi+2\xi^2)l^2 & -l(-1+4\xi)(-\xi+2\xi^2) & l^2(-\xi+2\xi^2)^2 \end{bmatrix} \quad (1278)$$

Zur Bildung der Schubsteifigkeitsmatrix wird wiederum eine reduzierte, numerische Integration eingesetzt. In  $\underline{B}_{\bar{\gamma}}$  treten Polynome vierten Grades auf. Eine numerische Integration nach Gauß über drei Stützstellen (M=3; s. Tab. 2.7) auf der S. 46 würde diese Polynome exakt integrieren, so daß hier bei der reduzierten Integration mit zwei Stützstellen (M=2) gearbeitet wird. Beispielsweise sei hier das Element  $b_{22}$  betrachtet ( $\xi = x/l$ ):

$$\begin{aligned} \frac{AG}{\kappa} \int_0^l b_{22} dx &= \frac{AG}{\kappa} \int_0^l \left( 1 - 3\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right)^2 dx \\ &\approx \frac{AG}{\kappa} \frac{l}{2} \left[ b_{22} \left( x = \frac{1}{2}l \left( 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \right) \right) + b_{22} \left( x = \frac{1}{2}l \left( 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \right) \right) \right] \\ &= \frac{AG}{\kappa} \frac{l}{2} \left[ \frac{(3 + \sqrt{3})^2}{108} + \frac{(-3 + \sqrt{3})^2}{108} \right] = \frac{AG}{\kappa} \frac{l}{9} \end{aligned} \quad (1279)$$

Die exakte Integration führt auf einen Wert von  $2/15l$  statt  $1/9l$ . Er ist also größer als der Wert der reduzierten, numerischen Integration. Aus der Integration über alle Elemente von  $\underline{B}_{\bar{\gamma}}$  erhält man die nachfolgende Schubsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_s$ :

$$\underline{K}_s = \frac{1}{18} \frac{AG}{\kappa l} \begin{bmatrix} 42 & 9l & -48 & 12l & 6 & -3l \\ 9l & 2l^2 & -12l & 2l^2 & 3l & -l^2 \\ -48 & -12l & 96 & 0 & -48 & 12l \\ 12l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -12l & 2l^2 \\ 6 & 3l & -48 & -12l & 42 & -9l \\ -3l & -l^2 & 12l & 2l^2 & -9l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (1280)$$

② **Überlagerung der Matrizen**

Die Addition von  $\underline{K}_b$  und  $\underline{K}_s$  führt auf die Steifigkeitsmatrix des dreiknotigen Timoshenko-Balkens:

$$\underline{K} = \underline{K}_b + \underline{K}_s =$$

42	9l	-48	12l	6	-3l
9l	$2\left(1 + 21\frac{\kappa}{\beta}\right)l^2$	-12l	$2\left(1 - 24\frac{\kappa}{\beta}\right)l^2$	3l	$\left(6\frac{\kappa}{\beta} - 1\right)l^2$
-48	-12l	96	0	-48	12l
12l	$2\left(1 - 24\frac{\kappa}{\beta}\right)l^2$	0	$2\left(1 + 12\frac{\kappa}{\beta}\right)l^2$	-12l	$2\left(1 - 24\frac{\kappa}{\beta}\right)l^2$
6	3l	-48	-12l	42	-9l
-3l	$\left(6\frac{\kappa}{\beta} - 1\right)l^2$	12l	$2\left(1 - 24\frac{\kappa}{\beta}\right)l^2$	-9l	$2\left(1 + 21\frac{\kappa}{\beta}\right)l^2$

(1281)

In voranstehender Matrix ist der Schlankheitsgrad  $\beta = AGl^2/(EI)$  eingeführt worden.

⑤ **Streckenlasten**

Für die Streckenlast wird eine quadratische Verteilung über die Elementlänge angenommen. Diese wird über die Beziehung  $\int_0^l qvdx$  in Knotenkräfte umgerechnet. Die quadratische Verteilung der Streckenlast  $q(\xi)$  wird ebenso wie die Verschiebung über die Formfunktion (334) auf der S. 121 beschrieben:

$$q(\xi) = \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 - 3\xi + 2\xi^2 & 4\xi(1 - \xi) & \xi(2\xi - 1) \end{array} \right] \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \end{bmatrix} = \vec{N}^T \vec{q} \quad (1282)$$

$q_i$ ,  $q_j$  und  $q_k$  sind die Werte der Streckenlasten an den drei Knoten des Elementes. Einsetzen in  $\int_0^l qvdx$  führt zu:

$$\int_0^l v q dx = l \int_0^1 \vec{N}^T \vec{v} \vec{N}^T \vec{q} d\xi = \vec{v}^T l \underbrace{\int_0^1 \vec{N} \vec{N}^T d\xi}_{\vec{F}_q} \vec{q} \quad (1283)$$

Für den Vektor  $\vec{v}$  gilt:  $(\vec{v})^T = [v_i | v_j | v_k]$ . Das dyadische Produkt  $\vec{N} \vec{N}^T$  hat folgende Form:

$$\vec{N}\vec{N}^T = \begin{bmatrix} \frac{1-3\xi+2\xi^2}{4\xi(1-\xi)} \\ \frac{\xi(2\xi-1)}{\xi(2\xi-1)} \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{c|c|c} 1-3\xi+2\xi^2 & 4\xi(1-\xi) & \xi(2\xi-1) \end{array} \right] =$$

$$\left[ \begin{array}{c|c|c} \frac{1-6\xi+13\xi^2-12\xi^3+4\xi^4}{4\xi-16\xi^2+20\xi^3-8\xi^4} & \frac{4\xi-16\xi^2+20\xi^3-8\xi^4}{16\xi^2-32\xi^3+16\xi^4} & \frac{-\xi+5\xi^2-8\xi^3+4\xi^4}{-4\xi^2+12\xi^3-8\xi^4} \\ \frac{4\xi-16\xi^2+20\xi^3-8\xi^4}{-\xi+5\xi^2-8\xi^3+4\xi^4} & \frac{16\xi^2-32\xi^3+16\xi^4}{-4\xi^2+12\xi^3-8\xi^4} & \frac{-\xi+5\xi^2-8\xi^3+4\xi^4}{\xi^2-4\xi^3+4\xi^4} \end{array} \right] \quad (1284)$$

Die Integration über die Elemente von (1284) führt auf die Knotenkräfte, die aus der Streckenlast hervorgehen:

$$\vec{F}_q = \begin{bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_k \end{bmatrix} = \frac{l}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \\ q_k \end{bmatrix} = \frac{l}{30} \begin{bmatrix} 4q_i+2q_j-q_k \\ 2q_i+16q_j+2q_k \\ -q_i+2q_j+4q_k \end{bmatrix} \quad (1285)$$

### ⑤ Schnittgrößen

Das Moment wird nach (1273) und (489) auf der S. (183) beschrieben als:

$$M = EI \frac{d\theta}{dx} = EI \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\xi} = EI \vec{B}_\varepsilon^T \vec{v} =$$

$$EI \frac{1}{l} \left[ \begin{array}{c|c|c} 0 & -3+4\xi & 0 \\ 4(1-2\xi) & 0 & -1+4\xi \end{array} \right] \vec{v} \quad (1286)$$

Die Querkraft ergibt sich aus (470) auf der S. 179 und (1273) zu:

$$Q = \frac{A}{\varkappa} G \bar{\gamma} = \frac{A}{\varkappa} G \vec{B}_{\bar{\gamma}}^T \vec{v} \quad (1287)$$

Mit (1277) erhält man:

$$Q = \frac{AG}{\varkappa l} \left[ \begin{array}{c|c|c} -3+4\xi & (-1+3\xi-2\xi^2)l & 4(1-2\xi) \\ 4(-1+\xi)\xi l & -1+4\xi & (1-2\xi)\xi l \end{array} \right] \vec{v} \quad (1288)$$

Diese quadratische Verteilung im Element wird durch eine lineare Funktion ersetzt, die die Werte an den beiden Gaußpunkten bei  $\xi_I = 1/2(1 - 1/3\sqrt{3})$  und  $\xi_{II} = 1/2(1 + 1/3\sqrt{3})$  durchläuft. Dies führt auf folgende Funktion:

$$\hat{Q} = \frac{AG}{\varkappa l} \left[ 3 - 4\xi \left| \left( \frac{2}{3} - \xi \right) l \right| 4(-1 + 2\xi) \left| \frac{2}{3} l \right| 1 - 4\xi \left| \left( -\frac{1}{3} + \xi \right) l \right| \right] \vec{v} \quad (1289)$$

Die Schnittgrößen an den Knoten ergeben sich aus (1286) und (1289) als:

$$\frac{\beta EI}{6 \varkappa l^3} \begin{bmatrix} 18 & 4l & -24 & 4l & 6 & -2l \\ 0 & -18\frac{\varkappa}{\beta}l^2 & 0 & 24\frac{\varkappa}{\beta}l^2 & 0 & -6\frac{\varkappa}{\beta}l^2 \\ 6 & l & 0 & 4l & -6 & l \\ 0 & -6\frac{\varkappa}{\beta}l^2 & 0 & 0 & 0 & 6\frac{\varkappa}{\beta}l^2 \\ -6 & -2l & 24 & 4l & -18 & 4l \\ 0 & 6\frac{\varkappa}{\beta}l^2 & 0 & -24\frac{\varkappa}{\beta}l^2 & 0 & 18\frac{\varkappa}{\beta}l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \\ v_k \\ \theta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_i \\ M_i \\ Q_j \\ M_j \\ Q_k \\ M_k \end{bmatrix} \quad (1290)$$

### ➤ A.6.9 Balkenbeispiel IX

186

#### ⊗ Umformung des Vorfaktors der Steifigkeitsmatrix

In (484) auf der S. 182 tritt in der Steifigkeitsmatrix des Timoshenko-Balkens ein Vorfaktor auf. Es wird dieser Vorfaktor wie folgt umgeformt:

$$\frac{AG}{4 \varkappa l} = \frac{1}{4 \varkappa} \underbrace{\frac{AG l^2 EI}{EI}}_{\beta} \frac{EI}{l^3} = \frac{\beta EI}{4 \varkappa l^3} \quad (1291)$$

Die Größe  $\beta$  nennt man den Schlankheitsgrad des Balkens.

#### ⊗ Steifigkeitsmatrix des Elementes

Bei der Einteilung des Kragbalkens in ein Element treten die Freiheitsgrade  $v_1$ ,  $\theta_1$ ,  $v_2$  und  $\theta_2$  auf. An der Einspannstelle bei  $x = 0$  ist die Durchbiegung  $v_1$  wie auch die Verdrehung  $\theta_1$  Null. Damit treten als unbekannte Verformungen die Durchbiegung  $v_2$  und die Verdrehung  $\theta_2$  an der Stelle  $x = l$  auf. Bedingt durch  $v_1 = \theta_1 = 0$  werden aus der Steifigkeitsmatrix, die gleichzeitig die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist, die ersten beiden Zeilen und Spalten gestrichen. Es bleibt damit folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Verformungen übrig:



$$\frac{\beta}{4\kappa} \frac{EI}{l^3} \left[ \begin{array}{c|c} 4 & -2l \\ \hline -2l & (1 + 4\frac{\kappa}{\beta})l^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} F_2 \\ 0 \end{array} \right] = \vec{F} \quad (1292)$$

Die linear verteilte Streckenlast des Balkens wird nach (488) auf der S. 183 in Kräfte umgerechnet. Für Knoten 2 erhält man:

$$F_2 = \frac{l}{6}(q_1 + 2q_2) = \frac{l}{6}(0 + 2q) = \frac{1}{3}ql \quad (1293)$$

Die zweite Komponente des Belastungsvektors  $\vec{F}$  ist Null, da aus der Umrechnung der Streckenlast  $q$  keine Momente hervorgehen.

② **Durchbiegung am Ende des Kragbalkens**

Die gesuchte Durchbiegung  $\bar{v}_2 = v_2 EI/(ql^4)$  wird aus (1292) berechnet, indem (1293) in (1292) eingesetzt wird. Außerdem wird die Gleichung mit  $4\kappa l^3/(\beta EI)$  durchmultipliziert:

$$\underbrace{\left[ \begin{array}{c|c} 4 & -2l \\ \hline -2l & (1 + 4\frac{\kappa}{\beta})l^2 \end{array} \right]}_{\underline{\hat{K}}_g} \underbrace{\left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right]}_{\vec{v}} = \underbrace{\frac{4\kappa ql^4}{3\beta EI} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right]}_{\vec{F}_g} \quad (1294)$$

Das Gleichungssystem  $\underline{\hat{K}}_g \vec{v} = \vec{F}_g$  wird durch Inversion von  $\underline{\hat{K}}_g$  gelöst. Für die Inversion einer symmetrischen  $2 \times 2$  Matrix  $\underline{A}$  gilt:

$$\underline{A} = \left[ \begin{array}{c|c} a & b \\ \hline b & c \end{array} \right] \Rightarrow \underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|} \left[ \begin{array}{c|c} c & -b \\ \hline -b & a \end{array} \right] \quad (1295)$$

Als Faktor vor der invertierten Matrix tritt im Nenner die Determinante  $|\underline{A}| = ac - b^2$  auf. In der Matrix werden die beiden Hauptdiagonalelemente vertauscht und die Nebendiagonalelemente mit  $(-1)$  multipliziert.

$$\underline{\hat{K}}_g^{-1} = \frac{\beta}{16\kappa l^2} \left[ \begin{array}{c|c} (1 + 4\frac{\kappa}{\beta})l^2 & 2l \\ \hline 2l & 4 \end{array} \right] \quad (1296)$$

Mit  $\underline{\hat{K}}_g^{-1} \vec{F}_g = \vec{v}$  erhält man die Verformungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} &= \frac{\beta}{16 \kappa l^2} \begin{bmatrix} \left(1 + 4 \frac{\kappa}{\beta}\right) l^2 & 2l \\ 2l & 4 \end{bmatrix} \frac{4 \kappa q l^4}{3 \beta E I} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{12} \frac{q l^2}{E I} \begin{bmatrix} \left(1 + 4 \frac{\kappa}{\beta}\right) l^2 & 2l \\ 2l & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \frac{q l^3}{E I} \begin{bmatrix} \left(1 + 4 \frac{\kappa}{\beta}\right) l \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1297)$$

Damit ergibt sich die gesuchte Durchbiegung  $\bar{v}_2$  zu:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{12} \frac{q l^4}{E I} \left(1 + 4 \frac{\kappa}{\beta}\right) \\ \bar{v}_2 &= v_2 \frac{E I}{q l^4} = \frac{1}{12} \left(1 + 4 \frac{\kappa}{\beta}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \frac{\kappa}{\beta} \end{aligned} \quad (1298)$$

Die Durchbiegung  $\bar{v}_2$  setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der Summand  $1/12$  ist der Biegeanteil und  $(1/3)(\kappa/\beta)$  beschreibt den Schubanteil in der normierten Durchbiegung. Für sehr schlanke Kragbalken ( $\beta \rightarrow \infty$ ) verschwindet der Schubanteil. Während der Schubanteil bei einem Element die exakte Lösung wiedergibt, ist der Biegeanteil mit einem Fehler von 9,1% versehen.

⊗ **Biege- und Schubanteil gleich groß**

Gesucht ist das Verhältnis  $h/l$  bei dem Biege- und Schubanteil gleich groß in  $\bar{v}_2$  sind. In (1298) tritt der Schubanteil mit  $(1/3)(\kappa/\beta)$  auf. Für den Rechteckquerschnitt ( $\kappa = 6/5$ ) ergibt sich mit  $\nu = 1/4$ :

$$\frac{1}{3} \frac{\kappa}{\beta} = \frac{1}{3} \frac{6 E I}{5 A G l^2} = \frac{2 E 2(1+\nu)}{5 E} \frac{t h^3}{12 t h l^2} = \frac{1}{15} \left(\frac{h}{l}\right)^2 (1+\nu) \stackrel{!}{=} \frac{1}{12} \quad (1299)$$

$$\frac{h}{l} = \sqrt{\frac{15}{12} \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}} = 1 \quad (1300)$$

Der Anteil aus Biegung und Schub ist gleich groß, wenn Höhe und Länge des Kragbalkens gleich groß sind. Einschränkend ist zu sagen, daß dies von der Anzahl der Elemente abhängt, da der Biegeanteil noch mit einem Fehler versehen ist. Der exakte Biegeanteil beträgt  $11/120$ . Bei einem Verhältnis von  $h/l = 1$  ergibt sich daraus eine Querkontraktion von  $\nu = 3/8 = 0,375$ . Nimmt man eine Querkontraktion von  $\nu = 0,3$  an, so ändert sich das Verhältnis von  $h/l$  zu  $\sqrt{715}/26 = 1,028$ .

➤ **A.6.10 Balkenbeispiel X**

186

⊙ **Erstellung der Netze und Durchführung der Rechnungen**

Die Rechnung mit 1, 2, 4 und 8 Elementen führt für das zwei- und dreiknotige Element zu normierten Durchbiegungen an der Stelle  $x = l$ , wie sie in der Tab. A.7 dargestellt sind.

**Tabelle A.7.** Normierte Durchbiegung  $\bar{v}$  an der Stelle  $x = l$  für unterschiedliche Elementanzahlen und dem zwei- bzw. dreiknotigen Timoshenko-Element

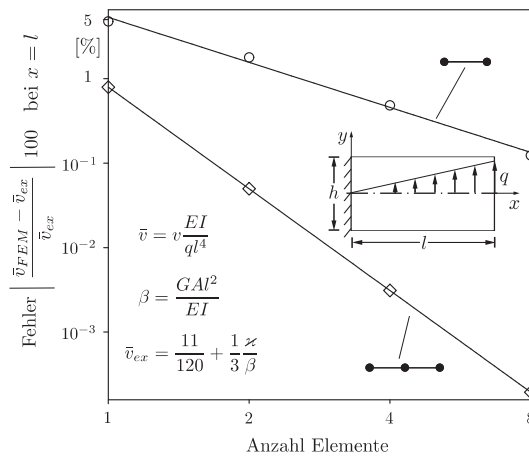
Elementtyp	Anzahl Elemente			
	1	2	4	8
zweiknotig	$\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$	$\frac{17}{192} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$	$\frac{93}{1024} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$	$\frac{4495}{49152} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$
dreiknotig	$\frac{13}{144} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$	$\frac{211}{2304} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$	$\frac{3379}{36864} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$	$\frac{54067}{589824} + \frac{1}{3} \frac{\varkappa}{\beta}$

An der exakten Lösung  $\bar{v}_{ex} = 11/120 + 1/3 (\varkappa/\beta)$  kann man ablesen, daß schon bei einem Element der Schubanteil in der Durchbiegung exakt beschrieben wird, was für den Biegeanteil nicht zutrifft.

⊙ **Konvergenzverlauf**

Für die Verschiebungen nach Tab. A.7 wird mit der exakten Lösung  $\bar{v}_{ex}$  folgender Fehler definiert:

$$\mathcal{E}_{\bar{v}} = \left| \frac{\bar{v}_{FEM} - \bar{v}_{ex}}{\bar{v}_{ex}} \right| 100 \quad (1301)$$



**Bild A.31.** Fehler in der normierten Durchbiegung  $\bar{v}$  des Timoshenko-Balkens in Abhängigkeit von der Anzahl Elemente ( $\varkappa/\beta = 1/4 \Rightarrow h/l = 1$  bei  $\nu = 1/4$ )

In Bild A.31 ist dieser Fehler in der Verformung in Abhängigkeit von der Elementanzahl dargestellt. Die obere (untere) Gerade ist dem zweiknotigen (dreiknotigen) Element zugeordnet. Die Geraden stellen Ausgleichsgeraden durch die Punkte dar, die nach Tab. A.7 und (1301) berechnet wurden. Sie lassen sich durch folgende Funktionen beschreiben:

$$\mathcal{E}_{\bar{v}} = \begin{cases} \frac{5,3147}{n^{1,7701}}\% & \text{zweiknotig} \\ \frac{0,7936}{n^4}\% & \text{dreiknotig} \end{cases} \quad (1302)$$

Der Fehler nimmt beim zweiknotigen Element nahezu quadratisch mit steigender Elementanzahl  $n$  ab. Beim dreiknotigen Element hingegen fällt der Fehler mit der vierten Potenz von  $n$ .

### ⊗ Schnittgrößen

Die Schnittgrößen sind für das zweiknotige Element nach (490) auf der S. 183 bzw (491) im Element konstant. In der Tab. A.8 sind die Querkräfte in Abhängigkeit von der Elementanzahl für das zweiknotige Bernoulli-Element und das zwei- bzw. dreiknotige Timoshenko-Element zusammengefaßt. Der exakte Wert der Querkraft lautet:  $\bar{Q}(x=0) = Q(x=0)/(ql) = -1/2$ .

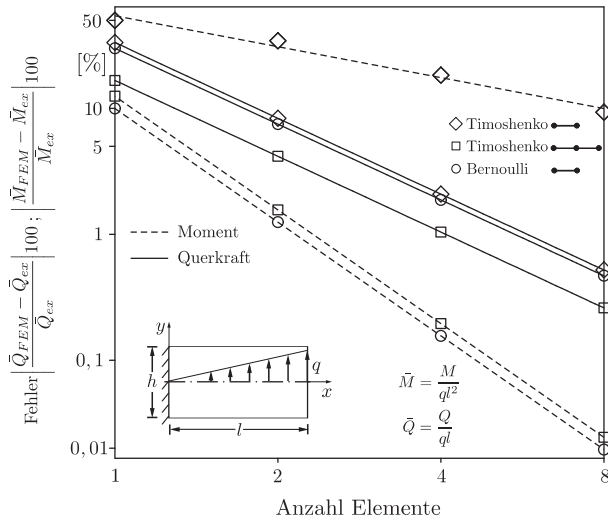
Elementtyp	Anzahl Elemente							
	1		2		4		8	
zweikn. (Bernoulli)	$-\frac{7}{20}$	30%	$-\frac{37}{80}$	7,5%	$-\frac{157}{320}$	1,88%	$-\frac{637}{1280}$	0,47%
zweikn. (Timoshenko)	$-\frac{1}{3}$	33,33%	$-\frac{11}{24}$	8,33%	$-\frac{47}{96}$	2,08%	$-\frac{191}{384}$	0,52%
dreikn. (Timoshenko)	$-\frac{7}{12}$	16,67%	$-\frac{25}{48}$	4,17%	$-\frac{97}{192}$	1,04%	$-\frac{385}{768}$	0,26%

**Tabelle A.8.** Querkräfte und deren Fehler an der Stelle  $x=0$

Die Tab. A.9 enthält die Momente in Abhängigkeit von der Elementanzahl für die dort angeführten Elementtypen. Der exakte Wert des Momentes lautet:  $\bar{M}(x=0) = M(x=0)/(ql^2) = 1/3$ .

Elementtyp	Anzahl Elemente							
	1		2		4		8	
zweikn. (Bernoulli)	$\frac{3}{10}$	10%	$\frac{79}{240}$	1,25%	$\frac{213}{640}$	0,16%	$\frac{5119}{15360}$	0,02%
zweikn. (Timoshenko)	$\frac{1}{6}$	50%	$\frac{7}{32}$	3,44%	$\frac{209}{768}$	18,36%	$\frac{619}{2048}$	9,33%
dreikn. (Timoshenko)	$\frac{7}{24}$	12,5%	$\frac{21}{64}$	1,56%	$\frac{511}{1536}$	0,20%	$\frac{1365}{4096}$	0,02%

**Tabelle A.9.** Momente und deren Fehler an der Stelle  $x=0$



**Bild A.32.** Fehler in den Schnittgrößen beim Kragbalken

In Bild A.32 sind die Ausgleichsgeraden für die Fehler in Querkraft und Moment in Abhängigkeit von der Elementanzahl dargestellt. Die durchgezogenen Linien geben die Querkräfte und die gestrichelten Linien die Momente wieder. Die Ausgleichsgeraden der Querkraftfehler  $E_{\bar{Q}}$  führen auf folgende Funktionen:

$$\mathcal{E}_{\bar{Q}} = \begin{cases} \frac{30}{n^2} \% & \text{zweiknotig (Bernoulli)} \\ \frac{100}{3n^2} \% & \text{zweiknotig (Timoshenko)} \\ \frac{50}{3n^2} \% & \text{dreiknotig (Timoshenko)} \end{cases} \quad (1303)$$

Die Konvergenzordnung der Querkraft der drei betrachteten Elementtypen ist identisch, denn sie ist quadratischer Natur. Daher verlaufen die Geraden parallel zueinander. Das beste Verhalten zeigt das dreiknotige Timoshenko-Element. Die Ausgleichsgeraden der Momentenfehler  $\mathcal{E}_{\bar{M}}$  können wie folgt beschrieben werden:

$$\mathcal{E}_{\bar{M}} = \begin{cases} \frac{10}{n^3} \% & \text{zweiknotig (Bernoulli)} \\ \frac{54,4780}{n^{0,8173}} \% & \text{zweiknotig (Timoshenko)} \\ \frac{66,5489}{n^{0,9410}} \% & \text{zweiknotig (Timoshenko) für } n > 1 \\ \frac{12,5}{n^3} \% & \text{dreiknotig (Timoshenko)} \end{cases} \quad (1304)$$

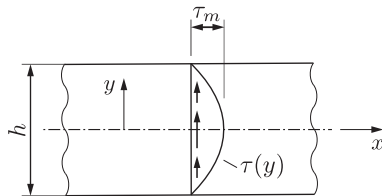
Die Konvergenzordnung des zweiknotigen Bernoulli-Elementes und des dreiknotigen Timoshenko-Elementes ist von dritter Ordnung, d.h. diese Elemente konvergieren sehr schnell gegen die exakte Lösung mit steigender Elementanzahl. Das zweiknotige Timoshenko-Element hingegen hat nicht einmal eine lineare Konvergenzordnung. Legt man die Ausgleichsgeraden durch die Punkte für Elementanzahl  $n > 1$ , so verbessert sich die Konvergenzordnung ein wenig und die Gerade verläuft exakt durch die Stützstellen.

#### ➤ A.6.11 Balkenbeispiel XI

Die exakte Schubspannungsverteilung  $\tau = \tau(y)$  für einen Rechteckquerschnitt ist in Bild A.33 dargestellt und stellt sich als quadratische Funktion dar:

186

$$\tau = \tau_m \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad (1305)$$



**Bild A.33.** Schubspannungsverteilung über die Balkenhöhe bei einem Rechteckquerschnitt mit der Dicke  $b$

Die maximale Schubspannung  $\tau_m$ , die bei  $y = 0$  auftritt, lässt sich über die Querkraft  $Q$  ausdrücken und es ergibt sich:

$$Q = \int_A \tau(y) dA = b \tau_m \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right] dy = \frac{2}{3} b h \tau_m = \frac{2}{3} A \tau_m$$

$$\tau_m = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} \quad (1306)$$

Damit erhält man die Schubspannungsverteilung als Funktion der Querkraft  $Q$ :

$$\tau = \frac{3Q}{2A} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right] \quad (1307)$$

Die Formänderungsarbeit  $\Pi_F^*$  für die exakte Schubspannungsverteilung  $\tau = \tau(y)$  lautet mit  $\gamma(y) = \tau(y)/G$ :

$$\begin{aligned} \Pi_F^* &= \frac{1}{2} \int_V \tau \gamma dV = \frac{1}{2} l \int_A \frac{\tau^2}{G} dA = \frac{1}{2} \frac{bl}{G} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \frac{3Q}{2A} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right]^2 dy \\ &= \frac{bl9Q^28}{2G4A^215} h = \frac{3Q^2l}{5AG} \end{aligned} \quad (1308)$$

Für die angenäherte, über die Höhe  $h$  konstante Schubspannung  $\bar{\tau}$  erhält man mit  $\bar{\tau} = Q/A_\kappa$  und  $\bar{\gamma} = \bar{\tau}/G$  folgende Formänderungsarbeit:

$$\bar{\Pi}_F^* = \frac{1}{2} \int_V \bar{\tau} \bar{\gamma} dV = \frac{1}{2} l \int_A \frac{\bar{\tau}^2}{G} dA = \frac{1}{2} \frac{l}{G} \frac{Q^2}{A_\kappa^2} \int_{A_\kappa} dA = \frac{1}{2} \frac{Q^2l}{A_\kappa G} \quad (1309)$$

Gleichsetzen der Formänderungsarbeiten führt mit  $A_\kappa = A/\kappa$  auf:

$$\frac{3Q^2l}{5AG} = \frac{1Q^2l}{2AG}\kappa \Rightarrow \kappa = \frac{6}{5} \quad (1310)$$

#### ➤ A.6.12 Balkenbeispiel XII

Unter Ausnutzung der Symmetrie wird der Balken in zwei Timoshenko-Elemente eingeteilt:

187

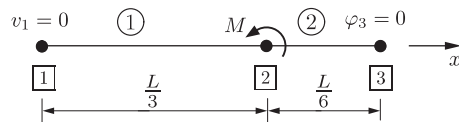


Bild A.34. Einteilung einer Hälfte des Balkens in zwei Elemente

#### ➤ Elementsteifigkeitsmatrizen

Nach (484) auf der S. (182) ergeben sich die Elementsteifigkeitsmatrizen mit  $l = L/3$  für Element 1 und  $l = L/6$  für Element 2:

$$\underline{K}_1 = \frac{AG}{24 \kappa L} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \\ \hline 72 & 12 L & -72 & 12 L \\ \hline 12 L & 2 \left( 1 + 36 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & -12 L & 2 \left( 1 - 36 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 \\ \hline -72 & -12 L & 72 & -12 L \\ \hline 12 L & 2 \left( 1 - 36 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & -12 L & 2 \left( 1 + 36 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 \end{array} \right] \begin{array}{l} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{array} \quad (1311)$$

$$\underline{K}_2 = \frac{AG}{24 \kappa L} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} v_2 & \theta_2 & v_3 & \theta_3 \\ \hline 144 & 12 L & -144 & 12 L \\ \hline 12 L & \left( 1 + 144 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & -12 L & \left( 1 - 144 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 \\ \hline -144 & -12 L & 144 & -12 L \\ \hline 12 L & \left( 1 - 144 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & -12 L & \left( 1 + 144 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 \end{array} \right] \begin{array}{l} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{array} \quad (1312)$$

Die Größe  $\beta$  steht als Abkürzung für  $AGL^2/(EI)$ .

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrizen unter Beachtung der Randbedingungen**

Die Verformungen  $v_1 = 0$  und  $\varphi_3 = 0$  sind bekannt, so daß die entsprechenden Zeilen aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  gestrichen werden können. Es ergibt sich:

$$\hat{\underline{K}}_g = \frac{AG}{24 \kappa L} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \theta_1 & v_2 & \theta_2 & v_3 \\ \hline 2 \left( 1 + 36 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & -12 L & 2 \left( 1 - 36 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & 0 \\ \hline -12 L & 216 & 0 & -144 \\ \hline 2 \left( 1 - 36 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & 0 & 3 \left( 1 + 72 \frac{\kappa}{\beta} \right) L^2 & -12 L \\ \hline 0 & -144 & -12 L & 144 \end{array} \right] \begin{array}{l} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \end{array} \quad (1313)$$

⊗ **Verformungen**

Die Verformungen werden durch Inversion von  $\hat{\underline{K}}_g$  in (1313) gewonnen:



$$\begin{aligned}
& \frac{\beta}{864 A G L} \begin{bmatrix} 432 & 96 L & 144 & 108 L \\ 96 L & 24 \left(1 + 24 \frac{\kappa}{\beta}\right) L^2 & 48 L & 4 \left(7 + 72 \frac{\kappa}{\beta}\right) L^2 \\ 144 & 48 L & 144 & 60 L \\ 108 L & 4 \left(7 + 72 \frac{\kappa}{\beta}\right) L^2 & 60 L & 3 \left(11 + 144 \frac{\kappa}{\beta}\right) L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\beta M}{72 A G L} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 L \\ 12 \\ 5 L \end{bmatrix} = \frac{M L}{72 E I} \begin{bmatrix} 12 \\ 4 L \\ 12 \\ 5 L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1314)
\end{aligned}$$

In dem voranstehenden Gleichungssystem spielen nur der Vorfaktor sowie die dritte Spalte in  $\hat{\underline{K}}_g^{-1}$  eine Rolle. Nachfolgend werden die dimensionslosen Verformungen betrachtet:

$$\bar{v}_i = v_i \frac{EI}{ML^2}; \bar{\theta}_i = \theta_i \frac{EI}{ML} \quad (1315)$$

② **Vergleich der Verformungen mit der exakten Lösung**

Die exakte Lösung für die Durchbiegung lautet:

$$\bar{v} = \begin{cases} \frac{1}{6} \frac{x}{L} & \text{für } 0 \leq \frac{x}{L} \leq \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} \frac{x}{L} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L}\right)^2 & \text{für } \frac{1}{3} \leq \frac{x}{L} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1316)$$

Die Verformungen aus (1314) stimmen mit der exakten Lösung nach (1316) überein. Die Biegelinie läßt sich mit Hilfe der Formfunktion nach (470) auf der S. 179 beschreiben. Dabei ist  $l_i$  die Länge des Elementes  $i$  und  $\bar{x}_i$  die lokale Koordinate des Elementes  $i$ . Es ergibt sich:

$$\bar{v} = \begin{cases} \left(1 - \frac{\bar{x}_1}{l_1}\right) \bar{v}_1 + \frac{\bar{x}_1}{l_1} \bar{v}_2 = \frac{1}{6} \frac{x}{L} & \text{für } 0 \leq \frac{x}{L} \leq \frac{1}{3} \\ \left(1 - \frac{\bar{x}_2}{l_2}\right) \bar{v}_2 + \frac{\bar{x}_2}{l_2} \bar{v}_3 = \frac{1}{36} + \frac{1}{12} \frac{x}{L} & \text{für } \frac{1}{3} \leq \frac{x}{L} \leq \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1317)$$

Aus (1317) erkennt man, daß im Element 1 ( $0 \leq x/L \leq 1/3$ ) die Biegelinie exakt beschrieben wird. Im Element 2 ( $1/3 \leq x/L \leq 1/2$ ) wird die exakte

Biegelinie durch eine lineare Funktion angenähert. Es tritt bei  $5/12 L$  der maximale Fehler von  $5,3\%$  auf.

⊗ **Schnittgrößen**

Der Balken ist querkraftfrei und weist für  $1/3 \leq x/L \leq 1/2$  ein konstantes Schnittmoment auf. Das Timoshenko-Element muß diese beiden Zustände abbilden können. Das Moment im Element wird über (490) auf der S. 183 beschrieben. Für die beiden Elemente ergibt sich:

$${}^1M = 3 \frac{EI}{L} (\theta_2 - \theta_1) = 3 \frac{EI}{L} \frac{ML}{72 EI} (12 - 12) = 0 \quad (1318)$$

$${}^2M = 6 \frac{EI}{L} (\theta_3 - \theta_2) = 6 \frac{EI}{L} \frac{ML}{72 EI} (0 - 12) = -M \quad (1319)$$

Der Momentenverlauf wird damit exakt beschrieben. Der Querkraftverlauf für die beiden Elemente nach (492) auf der S. 184:

$$\begin{aligned} {}^1Q &= \frac{AG}{\kappa} \left[ 3 \frac{v_2 - v_1}{L} - \frac{1}{2} (\theta_1 - \theta_2) \right] \\ &= \frac{AG}{\kappa} \left[ \frac{3}{L} \frac{ML}{72 EI} 4L - \frac{1}{2} \frac{ML}{72 EI} (12 + 12) \right] = 0 \end{aligned} \quad (1320)$$

$$\begin{aligned} {}^2Q &= \frac{AG}{\kappa} \left[ 6 \frac{v_3 - v_2}{L} - \frac{1}{2} (\theta_2 - \theta_3) \right] \\ &= \frac{AG}{\kappa} \left[ \frac{6}{L} \frac{ML}{72 EI} (5L - 4L) - \frac{1}{2} \frac{ML}{72 EI} 12 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1321)$$

Damit wird der querkraftfreie Verlauf richtig wiedergegeben.

⊗ **Vergleich der Lösungen bei exakter und reduzierter Integration**

In Bild A.35 ist die Verschiebung  $\bar{v}$  an der Stelle  $x = L/3$  für die exakt und reduziert integrierte Schubsteifigkeitsmatrix in Abhängigkeit vom Kehrwert des Schlankheitsgrades  $1/\beta$  in einem doppelt logarithmischen System dargestellt. Die Verschiebung  $\bar{v}_{red}$  der reduziert integrierten Version beschreibt die Verschiebung  $\bar{v}_{red} = 1/18$  exakt. Die exakt integrierte Version  $\bar{v}_{ex} = 6\kappa/(108\kappa + \beta)$  enthält den Schubfaktor  $\kappa$ , obwohl keine Querkraft auftritt. Zudem ist  $\bar{v}_{ex}$  abhängig vom Schlankheitsgrad  $\beta$  des Balkens. Für kleine Schlankheitsgrade stimmen beide Lösungen überein. Für schlanke Balken weichen beide Lösungen von einander ab. Für  $\beta \rightarrow \infty$  nimmt  $\bar{v}_{ex}$  den Wert Null an, d.h. der Balken wird unendlich steif.

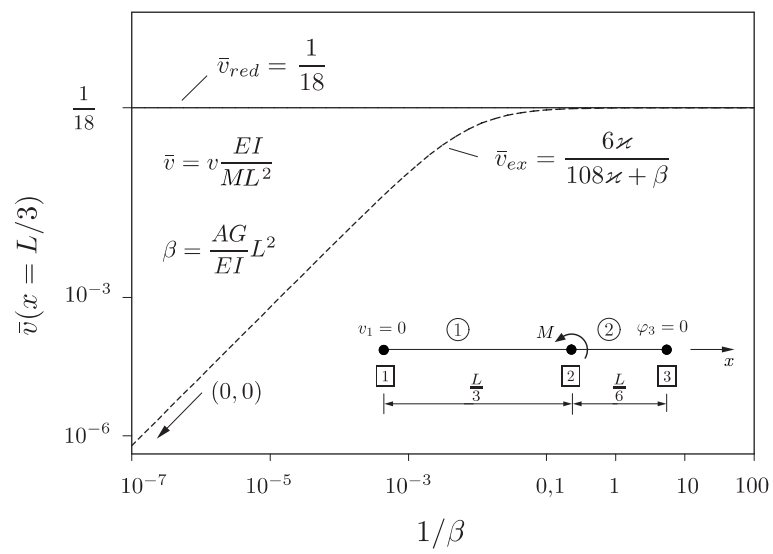


Bild A.35. Zweiseitig gelagerter Balken unter Biegebelastung



## A.6 Zweidimensionale Balkenprobleme

A.6

### ➤ A.6.13 Balkenbeispiel XIII

206

#### ➤ Elementknotenzuordnung

Die Tab. A.10 enthält zum einen die Elementknotenzuordnung. Sie entspricht der in Bild A.36 dargestellten Numerierung von Knoten und Elementen. Zum anderen ist für jedes Element der Richtungswinkel  $\varphi$  aufgeführt. Dieser ist in Bild 5.16 auf der S. 123 definiert. Er wird im Anfangsknoten eines Elementes im Uhrzeigergegensinn zwischen der globalen  $x$ -Achse und der lokalen  $\bar{x}$ -Achse gezählt. Die Größe  $a$  ist eine Abkürzung in der Steifigkeitsmatrix und ist hinter (532) auf der S. 199 angeführt.

Tabelle A.10. Elementknotenzuordnung und Geometriedaten

Element	Knoten		$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$A$	$E$	$I$	$a$
1	1	2	$180^\circ$	0	-1	1	1	1	1
2	2	3	$-45^\circ$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	1	2
3	2	4	$-135^\circ$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	1	2

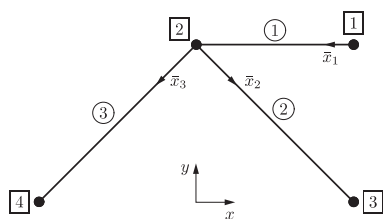


Bild A.36. Einteilung der zweidimensionalen Balkenstruktur in Elemente

#### ➤ Steifigkeitsmatrizen

Die Steifigkeitsmatrix ist in (532) auf der S. 199 definiert. Die Spalten und Zeilen sind über die Freiheitsgrade der Knoten der Elemente gekennzeichnet:

$$\underline{K}_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_1 \quad v_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2 \\ \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 12 & -6 & 0 & -12 & -6 \\ \hline 0 & -6 & 4 & 0 & 6 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & 6 \\ \hline 0 & -6 & 2 & 0 & 6 & 4 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array} \quad (1322)$$

$$\underline{K}_2 = \frac{1}{4}\sqrt{2} \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \varphi_3 \\ \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 7 & 5 & 6 & -7 & -5 & 6 \\ \hline 5 & 7 & 6 & 7 & -7 & 6 \\ \hline 6 & 6 & 8 & -6 & -6 & 4 \\ \hline -7 & 7 & -6 & 7 & 5 & -6 \\ \hline -5 & -7 & -6 & 5 & 7 & -6 \\ \hline 6 & 6 & 4 & -6 & -6 & 8 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array} \quad (1323)$$

$$\underline{K}_3 = \frac{1}{4}\sqrt{2} \begin{array}{c} \begin{array}{c} u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad u_4 \quad v_4 \quad \varphi_4 \\ \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c|c} 7 & -5 & 6 & -7 & 5 & 6 \\ \hline -5 & 7 & -6 & -7 & -7 & -6 \\ \hline 6 & -6 & 8 & -6 & 6 & 4 \\ \hline -7 & -7 & -6 & 7 & -5 & -6 \\ \hline 5 & -7 & 6 & -5 & 7 & 6 \\ \hline 6 & -6 & 4 & -6 & 6 & 8 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{array} \end{array} \quad (1324)$$

⊗ **Verformungen**

Die Knoten 1, 3, 4 weisen, wie aus Bild A.36 zu ersehen ist, eine feste Einspannung auf. Daher gilt:  $u_1 = v_1 = \varphi_1 = u_3 = v_3 = \varphi_3 = u_4 = v_4 = \varphi_4 = 0$ . Zudem wird am Knoten 2 die Verschiebung in  $y$ -Richtung behindert, wo-

raus folgt:  $v_2 = 0$ . Als unbekannte Verformungen bleiben daher die Verschiebung  $u_2$  und die Verdrehung  $\varphi_2$  übrig. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ist eine  $(12 \times 12)$ -Matrix. Zur Berechnung der Verformungen braucht aber diese Matrix nicht aufgebaut zu werden. Vielmehr genügt es, direkt die Untermatrix zu erstellen, die nach dem Streichen der entsprechenden Zeilen und Spalten übrig bleibt. Das sind die Zeilen und Spalten 4 ( $u_2$ ) und 6 ( $\varphi_2$ ).

An den Knoten 2 grenzen alle Elemente der Struktur an, so daß von allen ein Anteil in die Untermatrix eingebracht wird:

$$\begin{array}{c} u_2 \qquad \qquad \qquad \varphi_2 \\ \left[ \begin{array}{c|c} \langle 1 \rangle + \lceil \frac{7}{4}\sqrt{2} \rceil + \lfloor \frac{7}{4}\sqrt{2} \rfloor & \langle 0 \rangle + \lceil \frac{3}{2}\sqrt{2} \rceil + \lfloor \frac{3}{2}\sqrt{2} \rfloor \\ \langle 0 \rangle + \lceil \frac{3}{2}\sqrt{2} \rceil + \lfloor \frac{3}{2}\sqrt{2} \rfloor & \langle 4 \rangle + \lceil 2\sqrt{2} \rceil + \lfloor 2\sqrt{2} \rfloor \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad (1325)$$

Das Element  $(u_2, u_2)$  der voranstehenden Matrix enthält den Anteil  $\langle 1 \rangle$  von Element 1,  $\lceil 7/4\sqrt{2} \rceil$  von Element 2 und  $\lfloor 7/4\sqrt{2} \rfloor$  von Element 3. Entsprechend setzen sich die anderen Elemente der Untermatrix zusammen. Daraus ergeben sich die Beziehungen für die Verformungen:

$$\left[ \begin{array}{c|c} 1 + \frac{7}{2}\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ \hline 3\sqrt{2} & 4(1 + \sqrt{2}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1326)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{2(7 + 9\sqrt{2})} \left[ \begin{array}{c|c} 4(1 + \sqrt{2}) & -3\sqrt{2} \\ \hline -3\sqrt{2} & 1 + \frac{7}{2}\sqrt{2} \end{array} \right] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2(7 + 9\sqrt{2})} \left[ \begin{array}{c} -4 - 7\sqrt{2} \\ \hline 1 + \frac{13}{2}\sqrt{2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -0,352 \\ 0,258 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1327)$$

#### ⊗ Darstellung der Verformungen

In Bild A.37 sind die Verformungen des Balkensystems dargestellt. Die gestrichelten Linien geben die unverformte Struktur wieder. Die durchgezogenen Linien entsprechen den Biegelinien der einzelnen Balken.

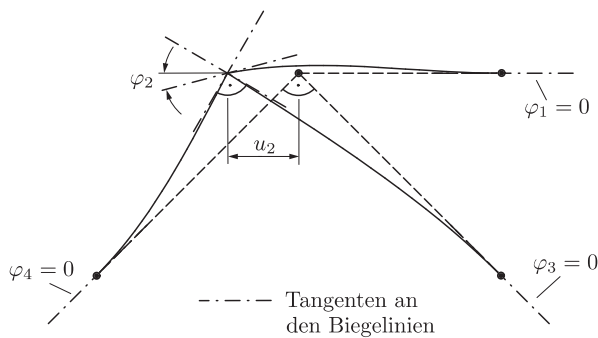


Bild A.37. Biegelinien des Balkensystems

#### ➤ A.6.14 Balkenbeispiel XIV

207

##### ➤ Elementknotenzuordnung

Die Einteilung in Elemente ist in Bild (A.38) dargestellt. Das Element 1 ist ein eindimensionales Balkenelement. Die Feder wird durch ein eindimensionales Stab dargestellt, wobei der Stab eine Federsteifigkeit  $k$  aufweist. Am Knoten 2 tritt eine Inkompatibilität auf. Von Element 1 kommend treten in diesem Knoten die beiden Freiheitsgrade  $v_2$  und  $\varphi_2$  auf. Von Element 2 kommend nur die Verschiebung des Stabes  $v_2$ . Die Feder ist damit gelenkig an den Balken angebunden. Sie führt die Verdrehung  $\varphi_2$  nicht aus.

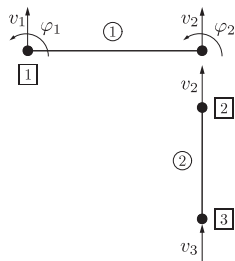


Bild A.38. Einteilung des Problems in ein eindimensionales Balken- und Stabelement

##### ➤ Elementsteifigkeitsmatrizen

Die Steifigkeitsmatrix des Elementes 1 ist in (401) auf der S. 151 zu finden. Die Zeilen und Spalten werden mit den Freiheitsgraden der Knoten der Elemente durchnummeriert, um sie später in die Gesamtsteifigkeitsmatrix einsteuern zu können ( $f = EI/l^3$ ):



$$\underline{K}_1 = f \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \\ \hline 12 & 6l & -12 & 6l \\ \hline 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ \hline -12 & -6l & 12 & -6l \\ \hline 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \end{array} \quad (1328)$$

Die Steifigkeitsmatrix des Elementes 2, also des eindimensionalen Stabelementes, ist in (267) auf der S. 102 zu finden:

$$\underline{K}_2 = k \begin{array}{c} \begin{array}{c|c} v_2 & v_3 \\ \hline 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} v_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \quad (1329)$$

⑤ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die Anteile der beiden Elemente in der Gesamtsteifigkeitsmatrix sind durch folgende Klammersymbole gekennzeichnet: Element 1:  $[\dots]$ ; Element 2:  $[\dots]$ .

$$\underline{K}_g = \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc|c} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 & v_3 \\ \hline [12f] & [6fl] & [-12f] & [6fl] & 0 \\ \hline [6fl] & [4f l^2] & [-6fl] & [2f l^2] & 0 \\ \hline [-12f] & [-6fl] & [12f] + [k] & [-6fl] & [-k] \\ \hline [6fl] & [2f l^2] & [-6fl] & [4f l^2] & 0 \\ \hline 0 & 0 & [-k] & 0 & [k] \end{array} \begin{array}{l} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \end{array} \end{array} \quad (1330)$$

⑤ **Randbedingungen**

- Feste Einspannung des Balkens am Knoten 1:  $v_1 = \varphi_1 = 0$
- Feste Einspannung der Feder am Knoten 3:  $v_3 = 0$

Durch Streichen der ersten zwei und der letzten Zeilen und Spalten aus der Matrix  $\underline{K}_g$  (1330) erhält man folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der Verformungen:

$$2f \left[ \begin{array}{c|c} 6 + \frac{k}{2f} & -3l \\ \hline -3l & 2l^2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1331)$$

Die Verformungen ergeben sich damit zu:

$$v_2 = \frac{F}{3f+k}; \quad \varphi_2 = \frac{3F}{2l(3f+k)} \quad (1332)$$

Mit diesen Verformungen, sowie denen, die sich aus den Auflagern ergeben, läßt sich über die Formfunktionen (386) auf der S. 146 die Biegelinie des Balkenelementes berechnen. Diese und die Längung der Feder sind in der linken Hälfte von Bild A.39 dargestellt.

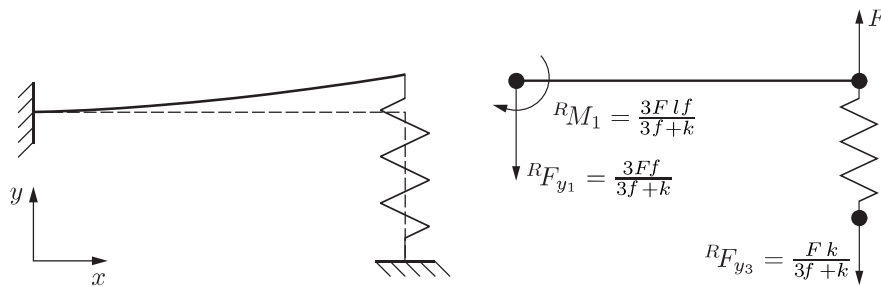


Bild A.39. Die Biegelinie und Auflagerreaktionen des Balkens

#### ⊗ Alternativer Lösungsweg (Ohne Stabelement)

Die Wirkung der Feder wird über die Kraft  $F_f$  berücksichtigt, die die Feder auf den Balken ausübt:

$$F_f = -k v_2 \quad (1333)$$

Nun ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix identisch mit der Steifigkeitsmatrix des eindimensionalen Balkens. Unter Berücksichtigung der Randbedingungen werden aus der Steifigkeitsmatrix die ersten zwei Zeilen und Spalten gestrichen und die voranstehende Beziehung in die rechte Seite eingesetzt:

$$2f \left[ \begin{array}{c|c} 6 & -3l \\ \hline -3l & 2l^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} F - k v_2 \\ 0 \end{array} \right] \quad (1334)$$

Es tritt eine gesuchte Größe, nämlich  $v_2$  auch auf der rechten Seite auf. Das System läßt sich aber umformen, so daß  $v_2$  nur auf der linken Seite des Gleichungssystems erscheint:

$$2f \left[ \begin{array}{c|c} 6 + \frac{k}{2f} & -3l \\ \hline -3l & 2l^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} F \\ 0 \end{array} \right] \quad (1335)$$

Man erhält das gleiche Gleichungssystem wie bei der Lösung mit einem Stabelement.

⊗ **Auflagerreaktionen**

Die Auflagerreaktionen ergeben sich aus dem Produkt Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\times$  Verformungsvektor ( $\underline{K}_g \vec{u} = \vec{F}$ ). Die vorhin berechneten Verformungen werden in den Verformungsvektor  $\vec{u}$  eingesetzt.

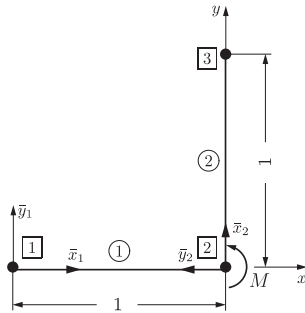
$$f \left[ \begin{array}{c|c|c|c|c} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 \\ \hline 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 \\ \hline -12 & -6l & 12 + \frac{k}{f} & -6l & -\frac{k}{f} \\ \hline 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{k}{f} & 0 & \frac{k}{f} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{F}{3f+k} \\ \frac{3F}{2l(3f+k)} \\ 0 \end{array} \right] = \frac{F}{3f+k} \left[ \begin{array}{c} -3f \\ -3fl \\ F(3f+k) \\ 0 \\ -k \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} R_{F_{y_1}} \\ R_{M_1} \\ F \\ 0 \\ R_{F_{y_3}} \end{array} \right] \quad (1336)$$

Die Auflagerreaktionen sind in der rechten Hälfte von Bild A.39 dargestellt.

➤ **A.6.15 Balkenbeispiel XV**

Die Elementknotenzuordnung ist in Bild A.40 gegeben. Der Winkel  $\varphi$  ist der Winkel zwischen der globalen  $x$ -Achse und der lokalen, elementbezogenen  $\bar{x}$ -Achse. Er wird im Uhrzeigergegensinn drehend positiv gezählt.

207



**Bild A.40.** Elementeinteilung und Belastung des Winkels

Die Tab. A.11 enthält die Elementknotenzuordnung und Winkel  $\varphi$  der beiden Elemente. Ebenso deren Längen  $l$ , Querschnittsflächen  $A$ , Elastizitätsmodule  $E$  und Flächenträgheitsmomente  $I$ .

**Tabelle A.11.** Elementknotenzuordnung und Elementdaten

Element	Knoten	$\varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$l$	$A$	$E$	$I$
1	1 2	$0^\circ$	0	1	1	1	1	1
2	2 3	$90^\circ$	1	0	1	1	1	1

➤ **Steifigkeitsmatrizen**

Die Steifigkeitsmatrix des zweidimensionalen Balkenelementes ist in (532) auf der S. 199 zu finden:

$$\underline{K}_1 = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \varphi_1 & u_2 & v_2 & \varphi_2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \\ \hline \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad (1337)$$

$$\underline{K}_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c} u_2 & v_2 & \varphi_2 & u_3 & v_3 & \varphi_3 \\ \hline 12 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline -6 & 0 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ \hline -12 & 0 & 6 & 12 & 0 & 6 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array} \quad (1338)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  geht aus der Überlagerung der beiden Einzelsteifigkeitsmatrizen hervor. So ergibt sich das Element  $(v_2, v_2)$  der Gesamtsteifigkeitsmatrix aus der Addition der Elemente der Zeile  $v_2$  und Spalte  $v_2$  von Element 1  $[12]$  und Element 2  $[1]$ .

$$\underline{K}_g = \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c} u_1 & v_1 & \varphi_1 & u_2 & v_2 & \varphi_2 & u_3 & v_3 & \varphi_3 \\ \hline [1] & [0] & [0] & [-1] & [0] & [0] & 0 & 0 & 0 \\ \hline [0] & [12] & [6] & [0] & [-12] & [6] & 0 & 0 & 0 \\ \hline [0] & [6] & [4] & [0] & [-6] & [2] & 0 & 0 & 0 \\ \hline [-1] & [0] & [0] & [1] + [12] & [0] + [0] & [0] + [-6] & [-12] & [0] & [-6] \\ \hline [0] & [-12] & [-6] & [0] + [0] & [12] + [1] & [-6] + [0] & [0] & [-1] & [0] \\ \hline [0] & [6] & [2] & [0] + [-6] & [-6] + [0] & [4] + [4] & [6] & [0] & [2] \\ \hline 0 & 0 & 0 & [-12] & [0] & [6] & [12] & [0] & [6] \\ \hline 0 & 0 & 0 & [0] & [-1] & [0] & [0] & [1] & [0] \\ \hline 0 & 0 & 0 & [-6] & [0] & [2] & [6] & [0] & [4] \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array} \quad (1339)$$

⊗ **Randbedingungen**

Die festen Einspannungen in den Knoten 1 und 3 haben zur Folge, daß gilt:  $u_1=v_1=\varphi_1=u_3=v_3=\varphi_3=0$ . Zudem fesselt das Auflager im Knoten 2 die Verschiebung  $v_2$ . Es bleiben als Unbekannte die Verschiebung  $u_2$  und die Verdrehung  $\varphi_2$  übrig.

⊗ **Verformungen**

Die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems zur Bestimmung der unbekannten Verformungen erhält man, indem in der Gesamtsteifigkeitsmatrix die Zeilen und Spalten 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9 gestrichen werden. Man erhält folgendes Untergleichungssystem:

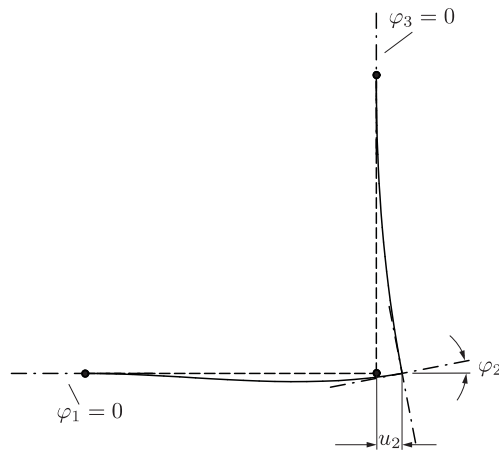
$$\left[ \begin{array}{c|c} 13 & -6 \\ \hline -6 & 8 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} u_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \quad (1340)$$

Die Verformungen aus (1340) werden durch Inversion der Koeffizientenmatrix gewonnen:

$$\frac{1}{68} \left[ \begin{array}{c|c} 8 & 6 \\ \hline 6 & 13 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] = \frac{1}{68} \left[ \begin{array}{c} 6 \\ 13 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} u_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] \quad (1341)$$

⊗ **Darstellung der Verformungen**

In Bild A.41 sind die Biegelinien der Balken dargestellt. Sie sind mit der Gleichung für die Formfunktionen (512) auf der S. 194 berechnet worden. Die strichpunktierten Linien geben die Tangenten bzw. Verdrehungen in den Knoten wieder.



**Bild A.41.** Biegelinien und Tangenten in den Knoten des Balkensystems

⊗ **Schnittgrößen**

Die Schnittgrößen werden aus der Beziehung  $\underline{K}_i {}^i\vec{u}$  berechnet.  $\underline{K}_i$  ist die Steifigkeit des Elementes  $i$  und  ${}^i\vec{u}$  ist der Verformungsvektor des Elementes  $i$ .

$$\text{Element 1 : } \begin{bmatrix} {}^1F_{x_1} \\ {}^1F_{y_1} \\ {}^1M_1 \\ {}^1F_{x_2} \\ {}^1F_{y_2} \\ {}^1M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{34} \\ \frac{39}{34} \\ \frac{13}{34} \\ \frac{3}{34} \\ -\frac{39}{34} \\ \frac{13}{17} \end{bmatrix} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} -3 \\ 39 \\ 13 \\ 3 \\ -39 \\ 26 \end{bmatrix} \quad (1342)$$

$$\text{Element 2 : } \begin{bmatrix} {}^2F_{x_2} \\ {}^2F_{y_2} \\ {}^2M_2 \\ {}^2F_{x_3} \\ {}^2F_{y_3} \\ {}^2M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{34} \\ 0 \\ \frac{4}{17} \\ \frac{3}{34} \\ 0 \\ -\frac{5}{34} \end{bmatrix} = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (1343)$$

⊗ **Auflagerreaktionen**

Die Auflagerreaktionen lassen sich auf zweierlei Weise berechnen. Zum einen über die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g \vec{u} = \vec{F}$ . Zum anderen sind sie in den Schnittgrößen enthalten, da für das Gleichgewicht an jedem Knoten gilt:

$${}^R\vec{F}_i = \sum_j {}^j\vec{F}_i \quad (1344)$$

Der Vektor der Reaktionsgrößen  ${}^R\vec{F}_i$  am Knoten  $i$  stellt sich als Summe über alle Vektoren der Schnittgrößen  ${}^j\vec{F}_i$  dar. Die Summation erstreckt sich über alle Elemente, die an den Knoten  $i$  angrenzen.

In Bild A.42 sind die Schnittgrößen und Reaktionsgrößen angeführt. Betrachtet man z.B. den Knoten 2, so gilt:

$${}^R\vec{F}_2 = \sum_{j=1}^2 {}^j\vec{F}_2 = {}^1\vec{F}_2 + {}^2\vec{F}_2 = \frac{1}{34} \begin{bmatrix} 3 \\ -39 \\ 26 \end{bmatrix} + \frac{1}{34} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{39}{34} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ {}^R F_{y_2} \\ M \end{bmatrix}$$

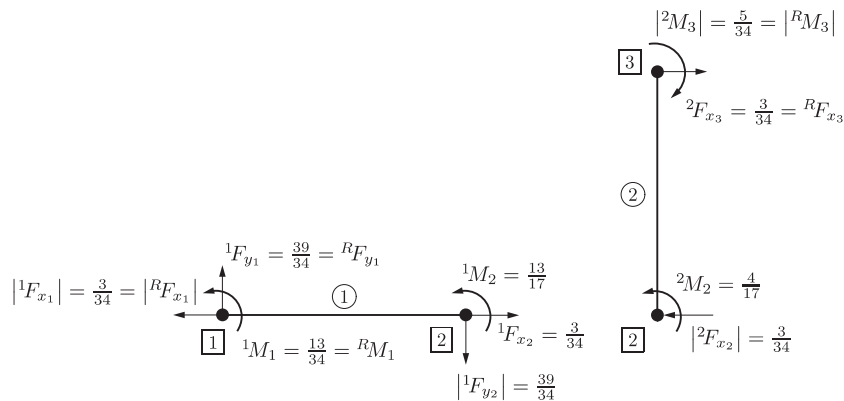


Bild A.42. Schnittgrößen und Auflagerreaktionen

(1345)

➤ A.6.16 Balkenbeispiel XVI

207

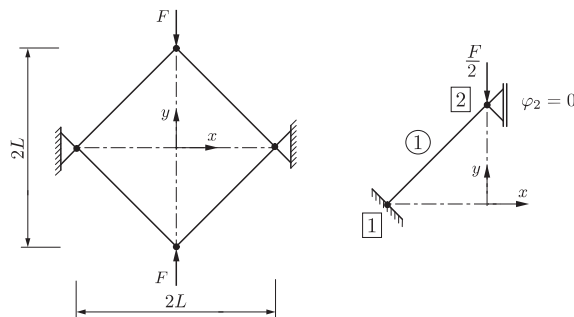


Bild A.43. Symmetrische 2D-Balkenstruktur und das FE-Modell

➤ Einteilung in Elemente, Randbedingungen und Belastung

Das Problem ist symmetrisch bzgl. der  $x$ - und  $y$ -Achse. Daher wird nur ein Viertel der Struktur in der Rechnung berücksichtigt, d.h. in ein Balkenelement eingeteilt. Dieses ist in der rechten Hälfte von Bild A.43 dargestellt. Die Verschiebungen  $u_1, v_1$  sowie die Verdrehung  $\varphi_1$  des Knotens 1 sind aus Symmetriegründen Null. Beim Knoten 2 ist aus Symmetriegründen nur eine vertikale Verschiebung  $v_2$  möglich. Die Belastung wird halbiert.

➤ Gesamtsteifigkeitsmatrix nach dem Einbringen der Randbedingungen

Als unbekannte Verformung tritt nur die Verschiebung  $v_2$  auf. Daher wird von der Steifigkeitsmatrix nach (532) auf der S. 199 nur das Element  $k_{55}$  benötigt. Mit  $l = \sqrt{2}L$ ,  $s = c = 1/2\sqrt{2}$ :



$$k_{55} = \frac{E}{l^3} (A l^2 s^2 + 12 c^2 I) = \frac{\sqrt{2} E}{4 L^3} (A L^2 + 6 I) \quad (1346)$$

⊗ **Verformungen**

Zur Bestimmung der Verschiebung  $v_2$  tritt auf der rechten Seite die Belastung  $F/2$  auf:

$$\frac{\sqrt{2} E}{4 L^3} (A L^2 + 6 I) v_2 = -\frac{F}{2} \Rightarrow v_2 = -\frac{\sqrt{2} F L^3}{E (A L^2 + 6 I)} \quad (1347)$$

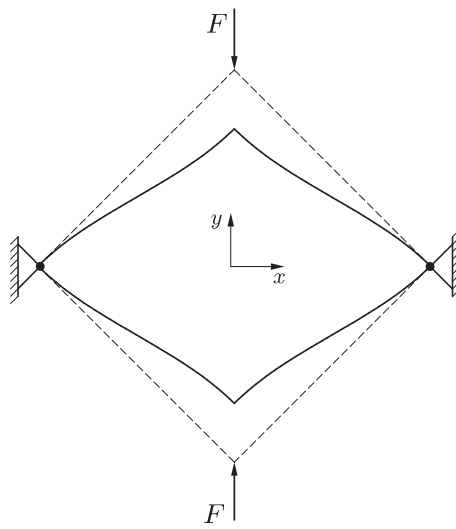
⊗ **Horizontale Auflagerkraft im linken Lager**

Die horizontale Auflagerkraft  ${}^R F_{x_1}$  gewinnt man aus der Beziehung  $\underline{K}_g \vec{u} = \vec{F}$ . Da nur  ${}^R F_{x_1}$  gesucht ist, benötigt man von  $\underline{K}_g$  bzw.  $\underline{K}$  nur die erste Zeile. Im Verformungsvektor  $\vec{u}$  ist nur das fünfte Element, nämlich  $v_2$ , ungleich Null. Damit wird von  $\underline{K}$  nur das Element  $k_{15}$  benötigt:

$$\begin{aligned} k_{15} &= (-A l^2 + 12 I) s c = \frac{\sqrt{2} E}{8 L^3} (12 I - 2 A L^2) \\ \frac{{}^R F_{x_1}}{2} &= k_{15} v_2 = \frac{\sqrt{2} E}{8 L^3} (12 I - 2 A L^2) \frac{\sqrt{2} L^3 F}{E (A L^2 + 6 I)} = \frac{A L^2 - 6 I}{2 (A L^2 + 6 I)} F \end{aligned} \quad (1348)$$

⊗ **Darstellung der Biegelinie**

In Bild A.44 sind die Biegelinien der vier Balken als durchgezogene Linien dargestellt. Die gestrichelten Linien geben die unverformte Lage der Balken wieder. Es ist deutlich zu erkennen, daß sich an den Knoten keine Verdrehungen einstellen und die rechten Winkel in den Ecken erhalten bleiben.



**Bild A.44.** Die Balken in unverformter Lage (gestrichelte Linien) und die Biegelinien der Balken. Angenommene Werte:  $F = L = A = I = E = 1$

## A.7 Scheibenprobleme

### ➤ A.7.1 Scheibenproblem I

233

#### ⊗ Elementknotenzuordnung

Der Kragbalken wird in ein Dreiecksscheibenelement eingeteilt wie es in Bild 7.11 auf der S. 234 bzw. in Bild A.45 dargestellt ist. Daraus ergibt sich folgende Elementknotenzuordnung:

Tabelle A.12. Elementknotenzuordnung

Element	Knoten 1	Knoten 2	Knoten 3	$x_{21}$	$x_{32}$	$x_{31}$	$y_{21}$	$y_{31}$	$y_{32}$
1	1	2	3	$l$	$-l$	0	$\frac{h}{2}$	$h$	$\frac{h}{2}$

Die Tabelle enthält die Größen  $x_{ij}$  und  $y_{ij}$ . Sie treten in der Steifigkeitsmatrix auf.

#### ⊗ Gesamtsteifigkeitsmatrix

Die Elementsteifigkeitsmatrix ist in (573) auf der S. 220 zu finden. Es wird direkt die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\hat{\underline{K}}_g$  erstellt, die sich nach dem Einbringen der Lagerungsbedingungen ergibt. Es sind nur die Verschiebungen  $u_2$  und  $v_2$  unbekannt, so daß  $\hat{\underline{K}}_g$  eine  $2 \times 2$  Matrix ist.

$$\hat{\underline{K}}_g = \frac{E h t}{4 l (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} u_2 & v_2 \\ \hline 2 & 0 \\ 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{matrix} u_2 \\ v_2 \end{matrix} \quad (1349)$$

#### ⊗ Verformungen

Die Verschiebungen lassen aus  $\hat{\underline{K}}_g \vec{u} = \vec{F}$  berechnen:

$$\frac{E h t}{4 l (1 - \nu^2)} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{F l (1 + \nu)}{E h t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} \quad (1350)$$

Die Verformungen im Element lassen sich mit Hilfe der Formfunktionen  $\underline{N}$  aus (563) auf der S. 217 beschreiben als:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1351)$$

Betrachtet man nur die Verformungen auf den Rändern des Elementes, so verschwindet jeweils eine Dreiecksordinate. Für den eingespannten Rand zwischen den Knoten 1 und 3 gilt:  $L_2 = 0$ . Die Verformungen auf diesem Rand lauten damit:

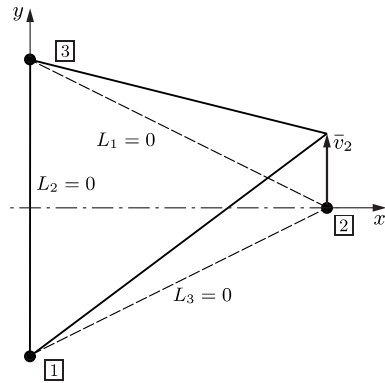


Bild A.45. Verformungen des Kragbalkens

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \frac{F l (1 + \nu)}{E h t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1352)$$

Die Elementkante weist entsprechend der vorgesehenen Einspannungsbedingung keine Verformungen auf.

Die Kante zwischen Knoten 1 und Knoten 2 hat die Dreiecksordinate  $L_3 = 0$ .

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{F l (1 + \nu)}{E h t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F l (1 + \nu)}{E h t} \begin{bmatrix} 0 \\ 4 L_2 \end{bmatrix} \quad (1353)$$

Nach (77) auf der S. 40 gilt:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 = L_1 0 + L_2 x_2 = L_2 x_2 \quad \Rightarrow \quad L_2 = \frac{x}{x_2} \quad (1354)$$

$$\bar{v} = \frac{E h t}{F l (1 + \nu)} v = 4 L_2 = 4 \frac{x}{x_2} \quad (1355)$$

Die Durchbiegung nimmt also linear mit der Koordinate  $x$  zu. Die Kanten des Elementes bleiben auch im verformten Zustand gerade. In Bild A.45 sind die normierten Verformungen dargestellt.

### ➤ A.7.2 Scheibenproblem II

234

#### ⊗ Elementknotennummerierung

Die Feder wird nicht als Element formuliert, so daß nur das Scheibenelement übrig bleibt. Die Knotenkoordinaten sind zur Bildung von  $x_{ij}$  und  $y_{ij}$  dem Bild A.46 zu entnehmen.

**Tabelle A.13.** Elementknotennummerierung

Element	Knoten 1	Knoten 2	Knoten 3	$x_{21}$	$x_{32}$	$x_{31}$	$y_{21}$	$y_{31}$	$y_{32}$
1	1	2	3	$l$	$-l$	0	$l$	$l$	0

#### ⊗ Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix ist in (573) auf der S. 220 zu finden.

$$\underline{K}_1 = \frac{1}{4} E t \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix} \quad (1356)$$

⊗ **Berücksichtigung der Feder**

Die Feder wird über die Kraft  $F_f$ , die sie auf den Kragbalken ausübt, berücksichtigt:

$$F_f = -v_2 k \quad (1357)$$

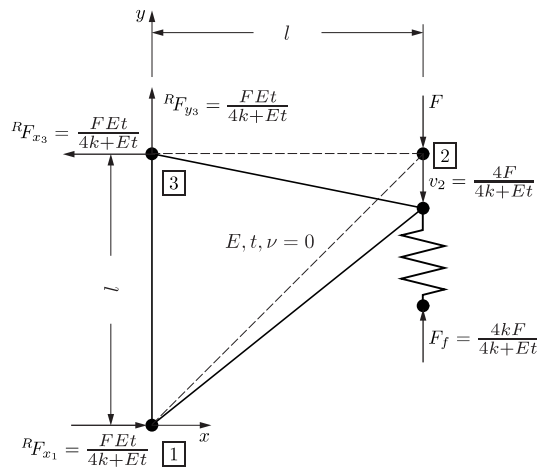


Bild A.46. Verformungen und Auflagerreaktionen des Kragbalkens mit  $E = t = k = 1$

⊗ **Verformungen**

Die Knoten 1 und 3 können bedingt durch die feste Einspannung keine Verschiebung ausführen. Es gilt:  $u_1=v_1=u_3=v_3=0$ . Daher werden die ersten und letzten beiden Zeilen und Spalten in der Steifigkeitsmatrix gestrichen und

es ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Verschiebungen:

$$\frac{1}{4}Et \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F - kv_2 \end{bmatrix} \quad (1358)$$

Die Verschiebungen ergeben sich zu:

$$u_2 = 0 ; v_2 = -\frac{4F}{4k + Et} \quad (1359)$$

Die verformte Struktur ist in Bild A.46 mit  $E = t = k = 1$  dargestellt, wobei ein Verformungsmaßstab von 1 : 5 angenommen wurde. Die Längsverschiebung  $u_2$  ist Null, da mit einem Element gerechnet wurde.

#### ⊗ Auflagerreaktionen

Das Produkt Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\times$  Verformungsvektor hat folgende Form:

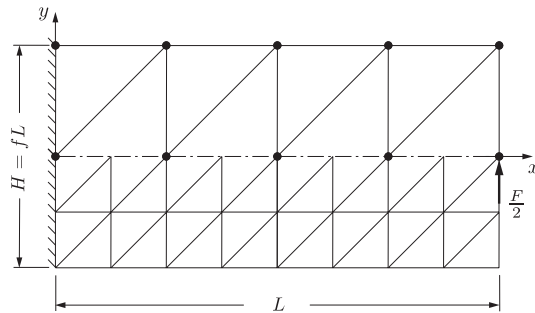
$$\frac{Et}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{4F}{4k+Et} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{F Et}{4k + Et} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^R F_{x_1} \\ {}^R F_{y_1} \\ 0 \\ -F + F_f \\ {}^R F_{x_3} \\ {}^R F_{y_3} \end{bmatrix} \quad (1360)$$

Die Auflagerreaktionen sind in Bild A.46 eingezeichnet. Die Federkraft  $F_f$  ergibt sich zu:

$$-F + F_f = -\frac{F Et}{4k + Et} \Rightarrow F_f = \frac{4kF}{4k + Et} \quad (1361)$$

#### ⊗ A.7.3 Scheibenproblem III

Es wird ein Kragbalken betrachtet, wie er in Bild A.47 abgebildet ist. Für dieses Beispiel wird die FE-Lösung mit der Lösung nach Ritz und der analytischen Lösung verglichen. Dabei wird die Antimetrie des Problems aus-



**Bild A.47.** Einteilung eines Kragbalkens in zwei unterschiedlich feine Netze. Symbole:  $L, t, E, F, \nu = 0$

genutzt. Es muß daher nur eine Hälfte des Kragbalkens betrachtet werden. Diese wird in 8, 32 und 128 Dreiecksscheibenelemente eingeteilt. Die Knoten auf der Symmetrieachse erhalten infolge der Ausnutzung der Antimetrie eine Randbedingung  $u=0$ . Für die Lösung nach Ritz werden Polynome zweiter und dritter Ordnung verwendet.

⊗ **Die analytische Lösung**

Die Durchbiegung an der Kraftangriffsstelle ergibt sich zu:

$$v(x=L, y=0) = \frac{F L^3}{3 E I} + \kappa \frac{F L}{A G} = \frac{F L^3}{E I} \left( \frac{1}{3} + \kappa \frac{E I}{A G L^2} \right) \quad (1362)$$

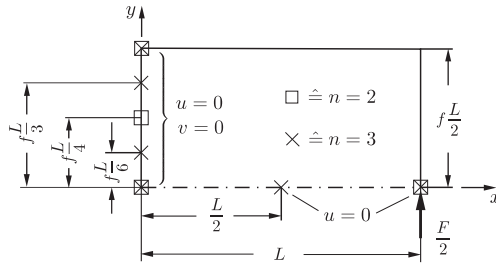
Der erste Term in (1362) beschreibt den Biegeanteil. Der zweite Term den Schubanteil.  $\kappa$  ist der Schubfaktor mit  $\kappa = 6/5$  für einen Rechteckquerschnitt. Den Ausdruck  $A G L^2 / (E I)$  bezeichnet man als Schlankheitsgrad  $\beta$  des Balkens. Durch Einführung des Verhältnisses  $f = H/L$  und der Dicke  $t$  läßt sich (1362) schreiben als:

$$\begin{aligned} v &= \frac{F L^3}{3 E I} + \kappa \frac{F L}{A G} = \frac{F}{E t} \left( \frac{4}{f^3} + \kappa \frac{2}{f} \right) \\ \bar{v} &= v \frac{E t}{F} = \frac{4}{f^3} + \kappa \frac{2}{f} \end{aligned} \quad (1363)$$

⊗ **Lösung mit dem Verfahren von Ritz**

Die Verschiebungsfelder  $u$  und  $v$  werden mit Polynomen zweiten und dritten Grades beschrieben. Die wesentlichen Randbedingungen sind in Bild A.48 dargestellt. Die Verschiebungen  $\bar{v}$  an der Kraftangriffsstelle, die sich für Polynomgrade  $n = 2$  und  $3$  ergeben, sind in der Tab. A.14 angeführt.





**Bild A.48.** Lage der wesentlichen Randbedingungen für die Polynome zweiter und dritter Ordnung sowie die Belastung

### ⊗ Fehlerbetrachtung

Die Tab. A.14 enthält die Lösungen für die FE- und Ritz-Rechnungen und die entsprechenden Fehler für  $f = 1/2$ . Während die Ritz-Lösung für  $n = 3$  nahezu der exakten Lösung entspricht, weist die FE-Lösung bei 128 Elementen noch einen Fehler von über 3% auf.

**Tabelle A.14.** Normierte Durchbiegung  $\bar{v}$  und Fehler an der Stelle  $x=L, y=0$  für die FEM und das Verfahren von Ritz

FE-Lösung			Ritz-Lösung		
Anz. Elem.	$\bar{v} = v E t / F$	Fehler	Polynomgrad	$\bar{v}$	Fehler
8	21,179	42,45%	2	28,093	23,66%
32	30,922	15,97%	3	36,698	0,28%
128	35,614	3,22%			

Der Fehler der FE-Lösung kann nach (143) auf der S. 57 wie folgt beschrieben werden:

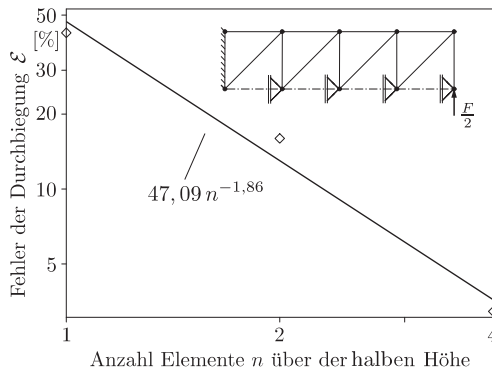
$$\log \mathcal{E} = \log(C^*) - p \log(n) \quad \text{mit} \quad C^* = C \left( \frac{H}{2} \right)^p \quad (1364)$$

Hierbei ist  $p$  die Konvergenzordnung des verwendeten Elementes und  $C$  eine problemabhängige Konstante.  $n$  ist die Anzahl der Elemente über der halben Höhe  $H$ . Eine lineare Regression im doppelt logarithmischen System führt zu folgendem Zusammenhang zwischen dem Fehler  $\mathcal{E}$  und der Elementanzahl  $n$  über der halben Höhe des Balkens:

$$\mathcal{E} = 47,09 n^{-1,86} \quad (1365)$$

Diese Funktion bildet im doppelt logarithmischen System eine Gerade (s. Bild A.49). Für einen Fehler von 1% läßt sich nach (1365) eine Elementanzahl von

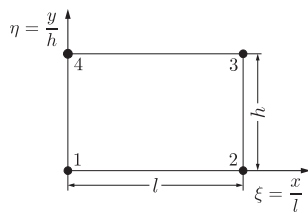
$n = 7,94$  berechnen. Realisiert werden muß hierfür eine ganze Anzahl von  $n = 8$  Elementen.



**Bild A.49.** Der Fehler der Verschiebung an der Kraftangriffsstelle in Abhängigkeit von der Elementanzahl über der halben Höhe des Balkens

#### ➤ A.7.4 Scheibenproblem IV

235



**Bild A.50.** Rechtwinkliges Vierecksscheibenelement mit der Anordnung der Knoten

#### ➤ Formfunktionen des rechtwinkligen, vierknotigen Scheibenelementes

##### ➤ Ansatzfunktion

Stellvertretend für die Verschiebungen  $u$  und  $v$  wird für die Größe  $\phi$  folgendes Polynom als Ansatzfunktion ausgeführt:

$$\phi = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta = \vec{a}^T \vec{x} = \vec{x}^T \vec{a} \quad (1366)$$

Dabei haben die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{x}$  folgende Bedeutung:

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} ; \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \\ \xi\eta \end{bmatrix} \quad (1367)$$

⑤ **Interpolationsbedingungen**

Die Interpolationsbedingungen werden entsprechend der Reihenfolge der Knoten nach Bild A.50 angesetzt:

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi = 0, \eta = 0) &= \phi_1 \Rightarrow \phi_1 = a_0 \\
 \phi(\xi = 1, \eta = 0) &= \phi_2 \Rightarrow \phi_2 = a_0 + a_1 \\
 \phi(\xi = 1, \eta = 1) &= \phi_3 \Rightarrow \phi_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\
 \phi(\xi = 0, \eta = 1) &= \phi_4 \Rightarrow \phi_4 = a_0 + a_2
 \end{aligned} \tag{1368}$$

Diese vier Gleichungen lassen sich wie folgt in Matrixform schreiben:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\vec{a}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{bmatrix}}_{\vec{\phi}} \tag{1369}$$

Durch die Inversion von  $\underline{A}$  ergeben sich die Koeffizienten der Ansatzfunktion zu:

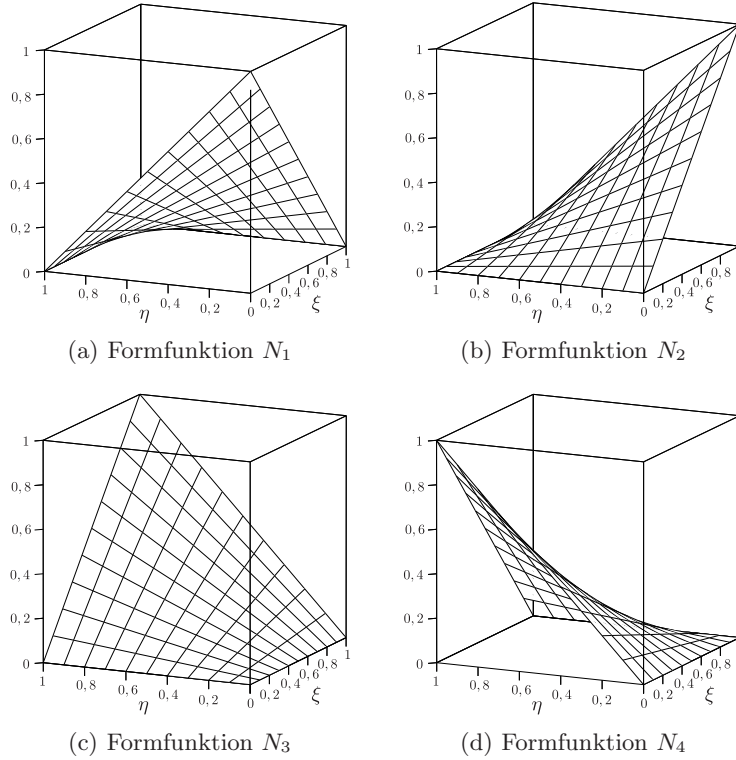
$$\underline{A} \vec{a} = \vec{\phi} \Rightarrow \vec{a} = \underline{A}^{-1} \vec{\phi} ; \underline{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{1370}$$

Damit lässt sich die Ansatzfunktion über die Formfunktionen  $N_i$  ausdrücken als:

$$\begin{aligned}
 \phi &= \vec{x}^T \vec{a} = \vec{x}^T \underline{A}^{-1} \vec{\phi} = \vec{N}^T \vec{\phi} \\
 \vec{N}^T &= \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\left[ \underbrace{1 - \xi - \eta + \xi\eta}_{N_1} \mid \underbrace{\xi(1 - \eta)}_{N_2} \mid \underbrace{\xi\eta}_{N_3} \mid \underbrace{\eta(1 - \xi)}_{N_4} \right] \quad (1371)$$

Das Bild A.51 zeigt die vier Formfunktionen aus (1371).



**Bild A.51.** Die Formfunktionen des vierknotigen Vierecksscheibenelements

### ⊗ Dehnungen und Spannungen

Die Dehnungen der Scheibe werden über die Verschiebungen  $u$  und  $v$  wie folgt ausgedrückt:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{L} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (1372)$$

⊗ **Dehungs-Verschiebungs-Beziehung**

Über die Formfunktionen nach (1371) lassen sich die Verschiebungen  $u$  und  $v$  durch die Knotenverschiebungen ausdrücken:

$$\vec{\hat{u}} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{\underline{N}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}}_{\vec{u}} \quad (1373)$$

Damit können die Dehnungen über die Knotenverschiebungen berechnet werden:

$$\vec{\varepsilon} = \underline{L} \underline{N} \vec{u} = \underline{B} \vec{u} \quad (1374)$$

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\eta-1}{l} & 0 & \frac{1-\eta}{l} & 0 & \frac{\eta}{l} & 0 & -\frac{\eta}{l} & 0 \\ 0 & \frac{\xi-1}{h} & 0 & -\frac{\xi}{h} & 0 & \frac{\xi}{h} & 0 & \frac{1-\xi}{h} \\ \frac{\xi-1}{h} & \frac{\eta-1}{l} & -\frac{\xi}{h} & \frac{1-\eta}{l} & \frac{\xi}{h} & \frac{\eta}{l} & \frac{1-\xi}{h} & -\frac{\eta}{l} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1375)$$

⊗ **Steifigkeitsmatrix des vierknotigen Viereckselementes**

Die Steifigkeitsmatrix erhält man aus der Beziehung:  $\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV$ :

$$\underline{K} = \frac{Et}{24f(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 8(f^2 + \beta) & 3f(\nu + 1) & 4(-2f^2 + \beta) & 3f(-1 + 3\nu) \\ 3f(\nu + 1) & 8(\beta f^2 + 1) & 3f(1 - 3\nu) & 4(1 - 2\beta f^2) \\ 4(-2f^2 + \beta) & 3f(1 - 3\nu) & 8(f^2 + \beta) & -3f(\nu + 1) \\ 3f(-1 + 3\nu) & 4(1 - 2\beta f^2) & -3f(\nu + 1) & 8(\beta f^2 + 1) \\ -4(f^2 + \beta) & -3f(\nu + 1) & 4(f^2 - 2\beta) & 3f(1 - 3\nu) \\ -3f(\nu + 1) & -4(\beta f^2 + 1) & 3f(-1 + 3\nu) & 4(\beta f^2 - 2) \\ 4(f^2 - 2\beta) & 3f(-1 + 3\nu) & -4(f^2 + \beta) & 3f(\nu + 1) \\ 3f(1 - 3\nu) & 4(\beta f^2 - 2) & 3f(\nu + 1) & -4(\beta f^2 + 1) \\ 8(f^2 + \beta) & 3f(\nu + 1) & 4(-2f^2 + \beta) & 3f(-1 + 3\nu) \\ 3f(\nu + 1) & 8(\beta f^2 + 1) & 3f(1 - 3\nu) & 4(1 - 2\beta f^2) \\ 4(-2f^2 + \beta) & 3f(1 - 3\nu) & 8(f^2 + \beta) & -3f(\nu + 1) \\ 3f(-1 + 3\nu) & 4(1 - 2\beta f^2) & -3f(\nu + 1) & 8(\beta f^2 + 1) \end{bmatrix} \quad (1376)$$

Die Abkürzungen in (1376) haben folgende Bedeutung:  $\beta = (1 - \nu)/2$  ;  $f = h/l$ .

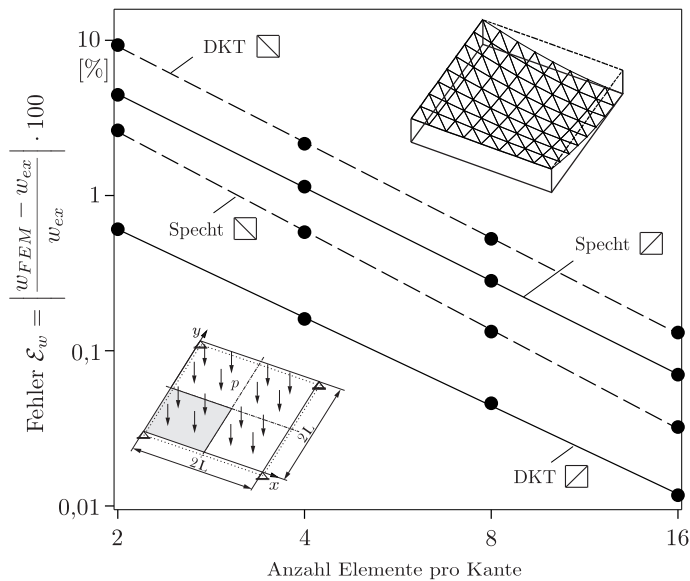
## A.8 Platten- und Schalenprobleme

A.8

### ➤ A.8.1 Vergleich der Platten nach DKT und Specht

In Bild A.52 ist der Fehler der Durchbiegung in Plattenmitte  $\mathcal{E}_w$  angeführt. Es wird aus Symmetriegründen nur das grau schattierte Viertel der Platte betrachtet. Die Elementanzahl pro Kante wird beginnend mit 2 bis auf 16 erhöht. Als Elemente werden das DKT-Element [8] und das Element nach Specht [55] eingesetzt.

285



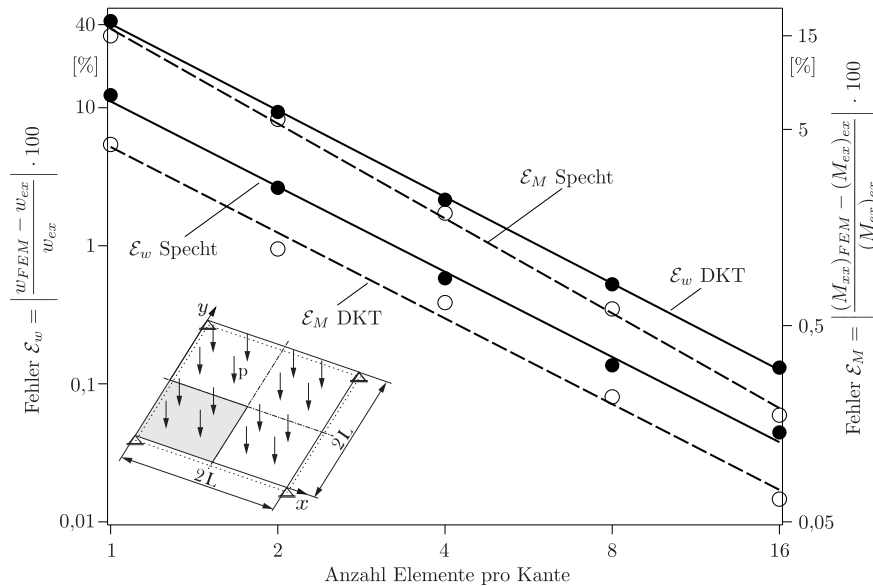
**Bild A.52.** Fehler in der Durchbiegung beim Konvergenztest der Platten nach Specht und DKT

Die Orientierung der Elemente, die hier über die Lage der Dreiecksdiagonale beschrieben wird, hat einen großen Einfluss auf die Güte der Ergebnisse. Am größten ist der Einfluß bei der Durchbiegung beim DKT-Element. So weist dieser Elementtyp bei 2 Elementen pro Kante einen Fehler von 10% auf, wenn die Diagonale unter  $135^\circ$   $\square$  verläuft. Ordnet man die Elemente so an, daß die Dreiecksdiagonale unter  $45^\circ$   $\square$  auftritt, so reduziert sich der Fehler  $\mathcal{E}_w$  auf weniger als 1%.

Das Element nach Specht reagiert nicht so empfindlich auf die Lage der Diagonalen. Im Gegensatz zum DKT-Element zeigt es die besten Ergebnisse beim Diagonalenverlauf unter  $135^\circ$   $\square$ .

Das Bild A.53 zeigt für einen Diagonalenverlauf unter  $135^\circ$   $\square$  die Fehler in der Plattenmitte für die Durchbiegung  $w \mathcal{E}_w$  und das Moment  $M_{xx} \mathcal{E}_M$  für

die Elemente nach Specht und DKT. Im Unterschied zu Bild A.52 beginnt die Elementanzahl pro Kante hier bei 1 und wird jeweils bis 16 Elemente erhöht. Die Fehler  $\mathcal{E}_w$  und  $\mathcal{E}_M$  weisen jeweils eine eigene  $y$ -Achse auf. Bei dieser Lage der Diagonalen zeigt das Specht-Element die beste Durchbiegung auf. Beim Moment  $M_{xx}$  zeigt das DKT-Element das bessere Ergebnis. Schon bei 2 Elementen pro Kante liegt der Momentenfehler bei etwa 1%.



**Bild A.53.** Fehler in der Durchbiegung und des Momentes beim Konvergenztest der Platten nach Specht und DKT

### ➤ A.8.2 Beispiel zu einem Schalenproblem

In Bild A.54 ist das Netz einer Aufnahme angeführt, die aus dünnwandigen Blechen zusammen gesetzt ist. Das Netz besteht aus 5818 achtknotigen, isoparametrischen Schalenelementen<sup>1</sup> CQUAD8 und 52 sechsknotigen Elementen CTRIA6. Es enthält 17773 Knoten.

293

### ➤ Vergleichsspannung nach von-Mises für die Schale

Für den räumlichen Fall stellt sich der Spannungstensor  $\underline{\sigma}$  dar als:

<sup>1</sup>Das Problem wurde mit NX NASTRAN 7.0 gerechnet



$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (1377)$$

Bei der Scheibe, Platte und Schale treten nicht alle Komponenten des dreidimensionalen Spannungstensors auf (s. Bild A.55).

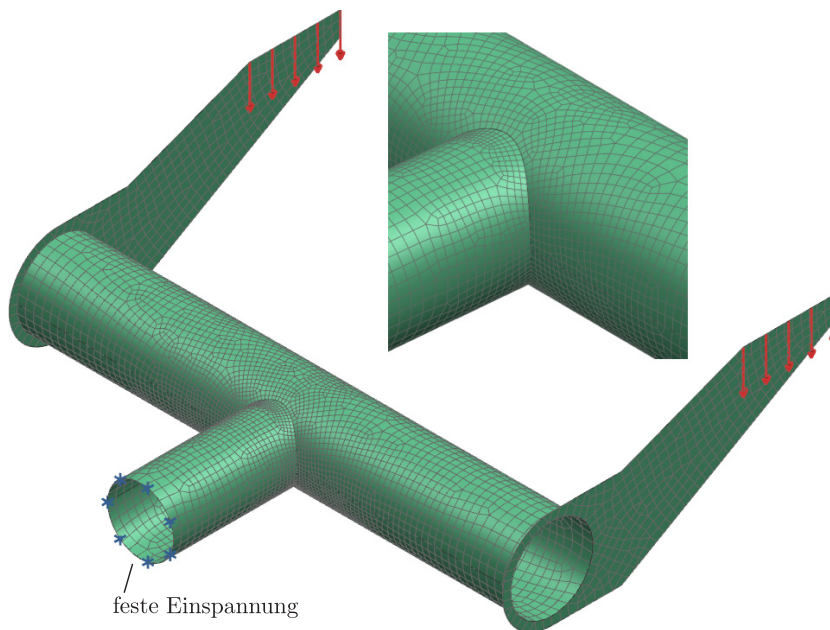


Bild A.54. Netz und Randbedingungen der Aufnahme<sup>1</sup>.

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \text{symm.} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$\sigma_{2D} \hat{=}$  Scheibe und Platte ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z)$ )  
 dickwandige Schale (Platte)  
 $\sigma_{zz} = 0$

Bild A.55. Spannungskomponenten von Scheibe, Platte und Schale

Bei der Scheibe bzw. dünnwandigen Platte und Schale treten nur die Normalspannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  sowie die Schubspannung  $\sigma_{xy}$  auf. Bei dickwandigen Platten und Schalen kommen noch die Schubspannungen  $\sigma_{xz}$  und  $\sigma_{yz}$  hinzu.

<sup>1</sup>Solver: NX NASTRAN 7.0, SESTATIC 101- Single Constraint

Die Normalspannung  $\sigma_{zz}$  verschwindet in den angeführten Fällen. Der Tensor nach (1377) läßt sich additiv in zwei Anteile zerlegen:

$$\underline{\sigma} = \underline{\sigma}' + \underline{\sigma}'' \quad (1378)$$

$\underline{\sigma}'$  nennt man den Deviator und  $\underline{\sigma}''$  den Kugeltensor. Letzterer enthält Spannungsanteile, die bei duktilen Werkstoffen keinen Beitrag zur Vergleichsspannung nach von-Mises liefern:

$$\underline{\sigma}'' = \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \sigma_{kk} \underline{E} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1379)$$

Der Deviator  $\underline{\sigma}'$  stellt sich nach (1378) dar als:

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}' = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}'' &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} - \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz} & 3\sigma_{xy} & 3\sigma_{xz} \\ 3\sigma_{xy} & 2\sigma_{yy} - \sigma_{xx} - \sigma_{zz} & 3\sigma_{yz} \\ 3\sigma_{xz} & 3\sigma_{yz} & 2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1380)$$

Ein Tensor zweiter Stufe besitzt die drei Invarianten  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$ . Die zweite Invariante des Deviators  $J_2'$  mit  $\sigma_v = \sqrt{3J_2'}$  bildet die Vergleichsspannung nach von-Mises:

$$J_2' = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma'_{ij} \quad (1381)$$

Daraus ergibt sich die von-Mises-Spannung als:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{xz}^2 + \sigma_{yz}^2)} \quad (1382)$$

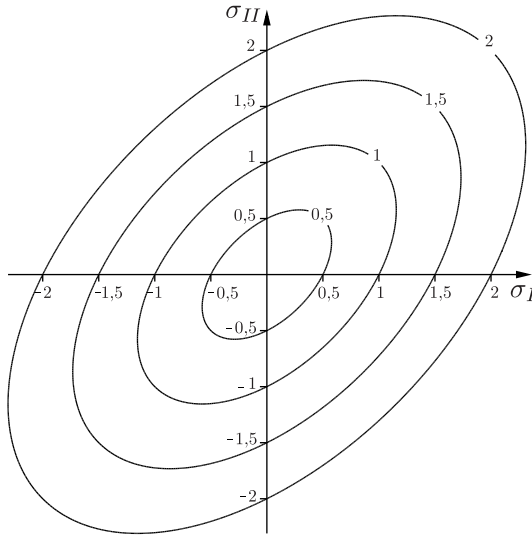
Für den ebenen Spannungszustand ( $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$ ) ergibt sich:

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} = \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2} \quad (1383)$$

Drückt man den Spannungstensor in den Hauptspannungskomponenten  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$  aus, so ergibt sich im zweidimensionalen Fall für  $\sigma_v$ :

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I \sigma_{II}} \quad (1384)$$

Trägt man diese Beziehung in der Hauptspannungsebene auf, so führt das zu einer Darstellung, wie sie in Bild A.56 angeführt ist.

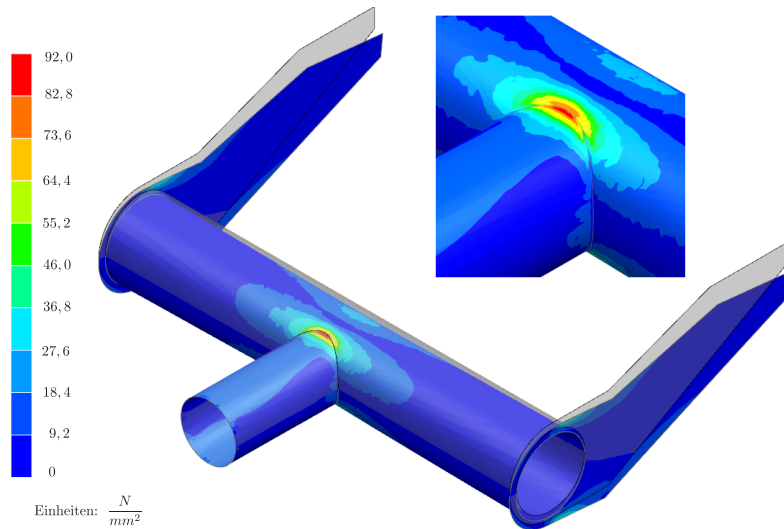


**Bild A.56.** Darstellung der von-Mises-Spannung in der Hauptspannungsebene

Die Kurven im Bild A.56 beschreiben Kurven gleicher von-Mises-Vergleichsspannung. Durch die Projektion eines Punktes auf die Achsen erhält man die zugehörigen Hauptspannungen  $\sigma_I$  und  $\sigma_{II}$ .

⑤ **Verformungen und Spannungen in der Aufnahme**

Das Bild A.57 zeigt die Verformungen und die von-Mises-Vergleichsspannungen auf der Oberseite der Aufnahme. Im Detailausschnitt ist deutlich zu erkennen, daß die höchste Spannung im Übergang der beiden Rohre liegt.



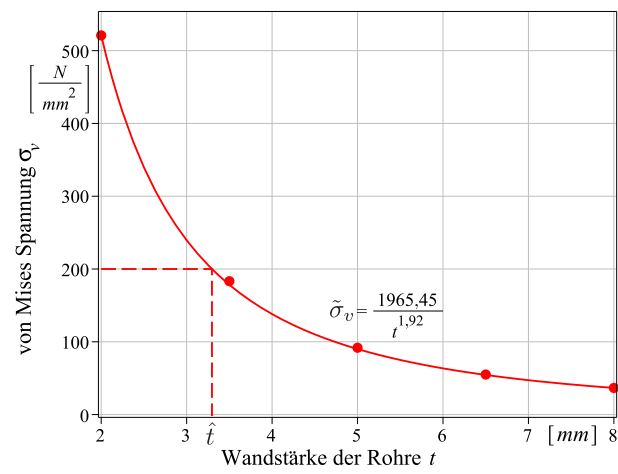
**Bild A.57.** Verformungen und Vergleichsspannungen nach von Mises in der Aufnahme mit einem Detailausschnitt

⑤ **Auslegung der Wandstärke der Rohre**

In Bild A.58 ist die maximale Vergleichsspannung nach von-Mises in den Rohren in Abhängigkeit von der Wandstärke der Rohre aufgetragen. Dazu sind für die Wandstärken von 2; 3,5; 5; 6,5 und 8 mm jeweils FE-Rechnungen durchgeführt worden. Die Vergleichsspannungen aus diesen Rechnungen dienen als Stützstellen für eine Approximationsfunktion, die folgendes Aussehen hat:

$$\tilde{\sigma}_v = 1965,45 t^{-1,92} \quad (1385)$$

Für eine zulässige Spannung von  $\sigma_v = 200 N/mm^2$  ergibt sich daraus eine erforderliche Wandstärke der Rohre von  $\hat{t} = 3,29 mm$ .



**Bild A.58.** Maximale von-Mises-Spannung in Abhängigkeit von der Wandstärke der Rohre

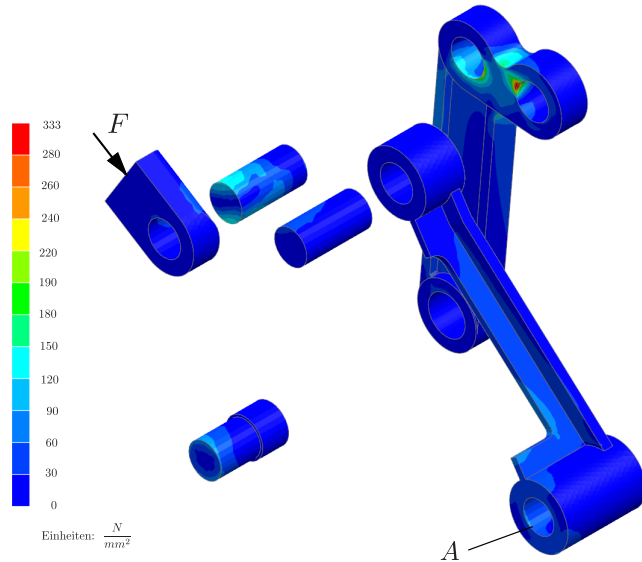


## A.9 Räumliches Spannungsproblem

A.9

### ➤ A.9.1 Beispiel zu einem räumlichen Spannungsproblem

317

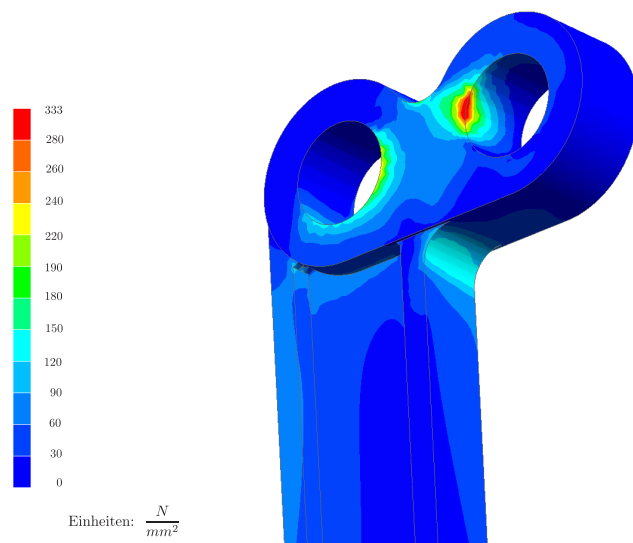


**Bild A.59.** Von-Mises Spannungen in den Bolzen und Hebeln

In Bild A.59 sind die Spannungen einer Hälfte des Hebelsystems angeführt. Dies sind drei Bolzen, zwei Hebel und das Anlenkstück des Hydraulikzylinders. Das Netz der Bolzen besteht aus 36617 Tetraederelementen mit jeweils vier Knoten. Der Rest ist in 24306 10-knotige Tetraederelemente eingeteilt. Das Gesamtmodell weist 52011 Knoten auf.

Zwischen den Bolzen und den Hebeln besteht Kontakt ohne Reibung. In der Buchse A liegt ein Zylinderkoordinatensystem, so daß sich hier eine Drehbewegung ausbilden kann.

Das Bild A.60 zeigt einen Ausschnitt des Hebels, der die maximale Vergleichsspannung nach von-Mises aufweist. Das Maximum bildet sich infolge des Kantentrags des Bolzens auf einer Kante des Auges des Hebels aus. Die Spannung liegt mit  $333 \text{ N/mm}^2$  nicht mehr im elastischen Bereich.



**Bild A.60.** Von-Mises Spannungen im Hebel



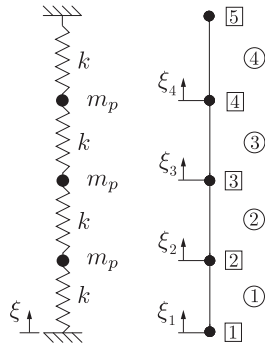
## A.10 Übungsbeispiele zur Stab- und Balkenschwingung

A.10

### ➤ A.10.1 Übungsbeispiel zur Stabschwingung

In Bild A.61 ist ein System aus vier Federn und drei Punktmassen dargestellt. Gesucht sind hierfür die Eigenfrequenzen, Eigenvektoren und Schwingungsformen.

329



**Bild A.61.** System aus vier Federn und drei Punktmassen. Es ist in vier Stabelemente eingeteilt

### ➤ Gesamtsteifigkeitsmatrix und Massenmatrix

Die vier Federn werden durch vier eindimensionale Stabelemente abgebildet. Die Überlagerung der Einzelsteifigkeitsmatrizen der Stabelemente führt auf nachfolgende Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$ :

$$\underline{K}_g = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 & 0 \\ -k & 2k & -k & 0 & 0 \\ 0 & -k & 2k & -k & 0 \\ 0 & 0 & -k & 2k & -k \\ 0 & 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \quad (1386)$$

Die Punktmassen des Systems werden auf der Hauptdiagonalen der Gesamtmassenmatrix  $\underline{M}_g$  angeordnet. Da an den Einspannungsenden der Federn kein Massenpunkt auftritt, ist das erste und letzte Element der Hauptdiagonalen 0.

$$\underline{M}_g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1387)$$

⊗ **Eigenwerte**

Die Berücksichtigung der wesentlichen Randbedingungen führt dazu, daß aus  $\underline{K}_g$  und  $\underline{M}_g$  jeweils die ersten und letzten beiden Zeilen und Spalten gestrichen werden. Daraus ergeben sich  $\hat{\underline{K}}_g$  und  $\hat{\underline{M}}_g$ . Damit erhält man  $\hat{\underline{K}}_g - \lambda \hat{\underline{M}}_g$  zu:

$$\hat{\underline{K}}_g - \lambda \hat{\underline{M}}_g = \begin{bmatrix} 2k - \lambda m_p & -k & 0 \\ -k & 2k - \lambda m_p & -k \\ 0 & -k & 2k - \lambda m_p \end{bmatrix} \quad (1388)$$

Die charakteristische Gleichung erhält man aus der Bildung der Determinanten von (1388):

$$\begin{aligned} |\hat{\underline{K}}_g - \lambda \hat{\underline{M}}_g| &= (2k - \lambda m_p)^3 - 2k^2(2k - \lambda m_p) \\ &= -m_p^3 \lambda^3 + 6k m_p^2 \lambda^2 - 10k^2 m_p \lambda + 4k^3 = 0 \end{aligned} \quad (1389)$$

Daraus ergeben sich folgende Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{m_p} k ; \quad \lambda_2 = \frac{2}{m_p} k ; \quad \lambda_3 = \frac{2 + \sqrt{2}}{m_p} k \quad (1390)$$

⊗ **Eigenfrequenzen**

Mit  $\lambda = \omega^2 = (2\pi f)^2$  erhält man:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{m_p} k} ; \quad f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{m_p} k} ; \quad f_3 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{m_p} k} \quad (1391)$$

⊗ **Eigenvektoren**

Einsetzen des Eigenwertes  $\lambda_1$  aus (1390) in (1388) führt auf folgendes homogenes Gleichungssystem:

$$k \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 0 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1392)$$

Mit  $u_4 = t$  erhält man aus den ersten beiden Gleichungen:

$${}^1\vec{u} = t \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1393)$$

Die Normierung des Eigenvektors zu einem Einheitsvektor  ${}^1\vec{e}_u = {}^1\vec{u}/|{}^1\vec{u}|$  führt zu:

$${}^1\vec{e}_u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1394)$$

Analog ergeben sich die normierten Eigenvektoren für  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$ :

$${}^2\vec{e}_u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix} ; \quad {}^3\vec{e}_u = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1395)$$

⊗ **Schwingungsformen**

Mit Hilfe der Formfunktionen  $\vec{N}$  des eindimensionalen Stabes lassen sich die Eigenformen des  $i$ -ten Eigenwertes schreiben als:

$${}^i u = \vec{N}^T {}^i \vec{e}_u \quad (1396)$$

Für das Element 2 ergibt sich für den ersten Eigenwert:

$${}^1u = \begin{bmatrix} 1 - \xi & \xi \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$${}^1u = \frac{1}{2}(1 - \xi) + \frac{1}{2}\sqrt{2}\xi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)\xi \quad (1397)$$

➤ **Darstellung einer Endlage der Schwingungsformen**

Das Bild A.62 zeigt eine Endlage der drei Schwingungsformen, die man aus den Eigenvektoren nach (1394) und (1395) gewinnt. Die jeweils zweite Endlage erhält man, indem man in (1394) und (1395) die negativen Wurzeln nimmt.

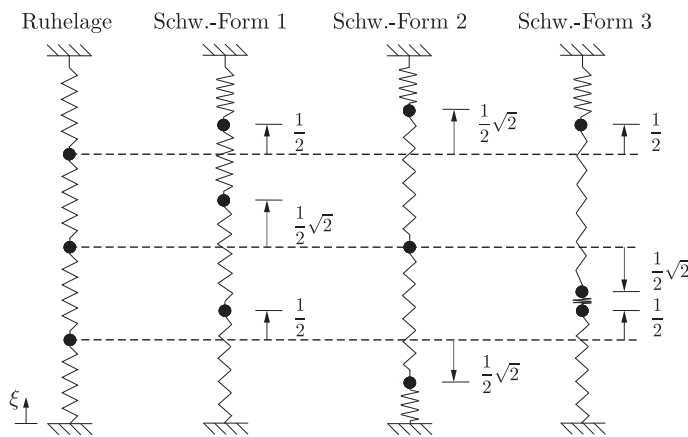


Bild A.62. Darstellung einer Endlage der drei Schwingungsformen

➤ **A.10.2 Übungsbeispiel zur Balkenschwingung**

➤ **Massenmatrix für diskrete Massen**

Die konsistente Massenmatrix für verteilte Massen nach (783) auf der S. 322 lautet:

$$\underline{M} = \int_V \rho \vec{N} \vec{N}^T dV = \rho \int_V \underline{N} dV \quad (1398)$$

Treten aber Massepunkte an den Knoten auf, so entfällt die Integration in (1398) und es werden die Punkte  $\xi = 0$  und  $\xi = 1$  betrachtet. Die Massenmatrix für Massepunkte  $\underline{M}_p$  lautet dann:

$$\underline{M}_p = m_i \underline{N}|_{\xi=0} + m_j \underline{N}|_{\xi=1} \quad (1399)$$

$m_i$  und  $m_j$  sind die diskreten Massen am Anfangs- und Endknoten. Dabei wird die Dyade  $\underline{N}$  jeweils an den Stellen betrachtet, in denen die Massepunkte auftreten:

$$\underline{M}_p = m_i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + m_j \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1400)$$

### ⊗ Eigenfrequenz

Der Balken wird in ein Element eingeteilt. Die Feder wird durch ein Stabelement abgebildet. Die Steifigkeitsmatrizen für Balken und Stab stellen sich dar als:

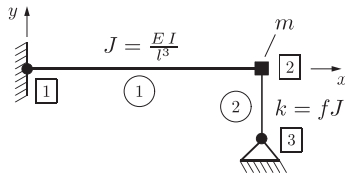


Bild A.63. Einteilung des Systems in ein Balken- und Stabelement

$$\underline{K}_1 = J \begin{bmatrix} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \\ 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} ; \quad \underline{K}_2 = fJ \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} \quad (1401)$$

Die Massenmatrix nach (1400) lautet:

$$\underline{M}_1 = \begin{bmatrix} v_1 & \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} ; \quad \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} v_2 \\ v_3 \end{matrix} \quad (1402)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen  $v_1 = \varphi_1 = v_3 = 0$  ergibt sich folgende Beziehung  $\underline{\hat{K}}_g - \lambda \underline{\hat{M}}_g$ :

$$\begin{aligned} \underline{\hat{K}}_g - \lambda \underline{\hat{M}}_g &= J \begin{bmatrix} 12+f & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (12+f)J - \lambda m & -6lJ \\ -6lJ & 4l^2J \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1403)$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$|\underline{\hat{K}}_g - \lambda \underline{\hat{M}}_g| = -4Jl^2m\lambda + (12+4f)l^2J^2 = 0 \quad (1404)$$

Daraus ergibt sich der Eigenwert zu:

$$\lambda_1 = \frac{3+f}{m}J \quad (1405)$$

Mit  $\lambda = \omega^2 = (2\pi f)^2$  erhält man die Eigenfrequenz:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(3+f)EI}{ml^3}} \quad (1406)$$

Ohne Feder ( $f = 0$ ) ergibt sich eine Eigenfrequenz von:

$$\tilde{f}_1 = 0,276 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (1407)$$

Verteilt man die Masse  $m$  stetig über die Länge des Kragbalkens, so erhält man nach (841) auf der S. 338:

$$\hat{f}_1 = 0,562 \sqrt{\frac{EI}{m l^3}} \quad (1408)$$

Hierbei tritt, was naheliegend ist, eine höhere unterste Eigenfrequenz auf.

⊗ **Schwingungsform**

Der gefundene Eigenwert nach (1405) wird in (1403) eingesetzt und das homogene Gleichungssystem zur Berechnung des Eigenvektors gebildet:

$$J \left[ \begin{array}{c|c} 9 & -6l \\ \hline -6l & 4l^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (1409)$$

In der Koeffizientenmatrix in (1409) tritt der Faktor  $f$  nicht auf, d.h. die Schwingungsform ist unabhängig von der Steifigkeit  $k$  der Feder. Multipliziert man (1409) mit  $1/J$  durch, so sieht man, daß die Schwingungsform nicht von der Balkensteifigkeit  $J = EI/l^3$  abhängt.

In (1409) wird gesetzt:  $\varphi_2 = t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Damit ergibt sich für den Eigenvektor:

$$\vec{v} = \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = t \left[ \begin{array}{c} \frac{2}{3}l \\ 1 \end{array} \right] \quad (1410)$$

Zur Bestimmung von  $t$  wird gefordert:  $|\vec{v}| \stackrel{!}{=} 1$ . Daraus ergibt sich für  $t$ :

$$t = \frac{3}{\sqrt{9 + 4l^2}} \quad (1411)$$

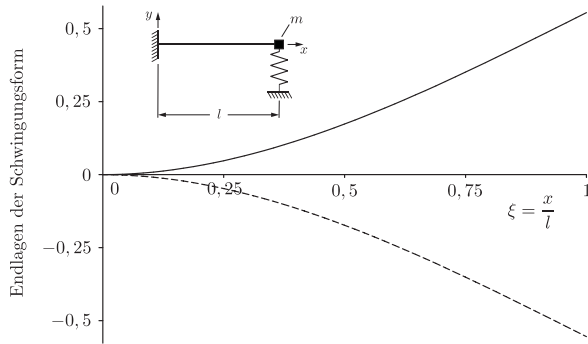
Einsetzen in (1410):

$$\vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{9 + 4l^2}} \left[ \begin{array}{c} 2l \\ 3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} e_{v_2} \\ e_{\varphi_2} \end{array} \right] \quad (1412)$$

Mit Hilfe der Formfunktion des eindimensionalen Balkens nach (386) auf der S. 146 läßt sich die Schwingungsform schreiben als:

$$e_v = (3\xi^2 - 2\xi^3) e_{v_2} + \xi^2 (\xi - 1) l e_{\varphi_2} = \frac{-3 + \xi}{\sqrt{9 + 4l^2}} l \xi^2 \quad (1413)$$

Der Eigenvektor nach (1412) enthält bedingt durch den dort auftretenden Wurzelausdruck die beiden Endlagen der Schwingungsform. Diese sind in Bild A.64 dargestellt. Wie schon zuvor ausgeführt, ist ihre Form unabhängig davon, daß der Kragbalken am freien Ende durch eine Feder gestützt wird.



**Bild A.64.** Endlagen der Schwingungsform für  $l = 1$



## A.11 Knicken von eindimensionalen Stäben und Balken

A.11

### ➤ A.11.1 Knickbeispiel I (Stab)

Das Beispiel in Bild A.65 besteht aus vier zweidimensionalen Stäben. Für dieses System werden die Knickkräfte und Knickformen berechnet.

367

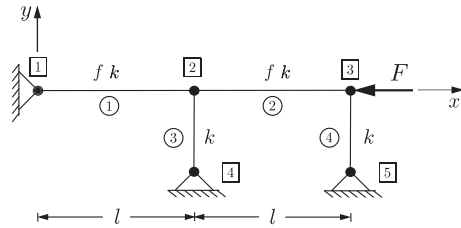


Bild A.65. Stäbe durch Federn gelagert

### ➤ Steifigkeitsmatrizen im globalen x,y-System

Für die Elemente 1 und 2 erhält man nach (348) auf der S. 125 mit  $\varphi = 0$  die nachfolgende Matrix:

$$\underline{K}_{E_1} = \underline{K}_{E_2} = fk \begin{bmatrix} u_1/u_2 & v_1/v_2 & u_2/u_3 & v_2/v_3 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1/u_2 \\ v_1/v_2 \\ u_2/u_3 \\ v_2/v_3 \end{matrix} \quad (1414)$$

Die Steifigkeitsmatrizen der Elemente 3 und 4 mit  $\varphi = 90^\circ$ :

$$\underline{K}_{E_3} = \underline{K}_{E_4} = k \begin{bmatrix} u_4/u_5 & v_4/v_5 & u_2/u_3 & v_2/v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_4/u_5 \\ v_4/v_5 \\ u_2/u_3 \\ v_2/v_3 \end{matrix} \quad (1415)$$

⊗ **Geometrische Steifigkeitsmatrizen im globalen x,y-System**

Aus (910) auf der S. 364 erhält man die globale geometrische Steifigkeitsmatrix. Für die Längskraft  $P$  gilt:  $P = -F$ . Der Winkel  $\varphi$  beträgt  $0^\circ$ :

$$\underline{K}_{G_1} = \underline{K}_{G_2} = \frac{F}{l} \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c} u_1/u_2 & v_1/v_2 & u_2/u_3 & v_2/v_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{l} u_1/u_2 \\ v_1/v_2 \\ u_2/u_3 \\ v_2/v_3 \end{array} \end{array} \quad (1416)$$

Die geometrischen Steifigkeitsmatrizen  $\underline{K}_G$  von Element 3 und 4 sind Nullmatrizen, da die Längskraft  $P$  Null ist.

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrizen**

Die elastische Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{E_g}$  ergibt sich zu:

$$\underline{K}_{E_g} = k \begin{array}{c} \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 \\ \hline f & 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -f & 0 & 2f & 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -f & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{l} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{array} \end{array} \quad (1417)$$

Die geometrische Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{G_g}$  lautet:

$$\underline{K}_{G_g} = \frac{F}{l} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{matrix} \quad (1418)$$

Die Gleichung  $\underline{K}_g = \underline{K}_{E_g} + \lambda \underline{K}_{G_g}$  führt auf:

$$\underline{K}_g = k \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 \\ f & 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda \frac{F}{kl} & 0 & \lambda \frac{F}{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -f & 0 & 2f & 0 & -f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda \frac{F}{kl} & 0 & 1 - 2\lambda \frac{F}{kl} & 0 & \lambda \frac{F}{kl} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f & 0 & f & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \frac{F}{kl} & 0 & 1 - \lambda \frac{F}{kl} & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{matrix} \quad (1419)$$

Aus den wesentlichen Randbedingungen ergibt sich:  $u_1 = v_1 = u_4 = v_4 = u_5 = v_5 = 0$ . Damit lassen sich die zugehörigen Zeilen und Spalten aus  $\underline{K}_g$  streichen und man erhält:

$$\underline{\hat{K}}_g = k \begin{array}{c|c|c|c} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \\ \hline 2f & 0 & -f & 0 \\ \hline 0 & 1 - 2\lambda \frac{F}{kl} & 0 & \lambda \frac{F}{kl} \\ \hline -f & 0 & f & 0 \\ \hline 0 & \lambda \frac{F}{kl} & 0 & 1 - \lambda \frac{F}{kl} \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} \quad (1420)$$

⊗ **Eigenwerte**

Die Determinante  $|\underline{\hat{K}}|$  führt auf folgende charakteristische Gleichung:

$$|\underline{\hat{K}}| = \left( \frac{fk}{l} \right)^2 (F^2 \lambda^2 - 3klF\lambda + k^2 l^2) = 0 \quad (1421)$$

Die Nullstellen von (1421) ergeben die beiden Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) \frac{lk}{F} \quad (1422)$$

Nur der kleinste Eigenwert  $\lambda_{min} = 1/2(3 - \sqrt{5})lk/F$  hat eine technische Bedeutung. Die kleinste Knickkraft ergibt sich daraus als:

$$F_{k_{min}} = \lambda_2 F = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})lk \quad (1423)$$

⊗ **Eigenform bzw. Knickform des kleinsten Eigenwertes**

Einsetzen des kleinsten Eigenwertes  $\lambda_2 = 1/2(3 - \sqrt{5})lk/F$  in die Matrix nach (1420) führt auf:

$$k \begin{array}{c|c|c|c} 2f & 0 & -f & 0 \\ \hline 0 & -2 + \sqrt{5} & 0 & \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) \\ \hline -f & 0 & f & 0 \\ \hline 0 & \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) & 0 & \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \end{array} \begin{array}{l} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array} = \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \quad (1424)$$

Gleichung (1424) besitzt einmal unendlich viele Lösungen. Daher wird gesetzt:  $v_3 = t, t \in \mathbb{R}$ . Mit dieser Vorgabe lassen sich die restlichen Verschiebungen bestimmen:

$${}^2\vec{u} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1425)$$

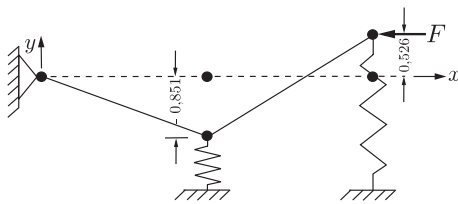
Der Eigenvektor  ${}^2\vec{u}$  wird zu einem Einheitsvektor normiert. Aus dieser Bedingung läßt sich  $t$  bestimmen:

$$|{}^2\vec{u}| = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{5 + \sqrt{5}} t = 1 \Rightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}} \quad (1426)$$

Damit erhält man den Eigenvektor als Einheitsvektor  ${}^2\vec{e}_u$ :

$${}^2\vec{e}_u = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,851 \\ 0 \\ 0,526 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_3 \end{bmatrix} \quad (1427)$$

Das Bild (A.66) zeigt die Knickform der kleinsten Knickkraft. Die Knickform hat bedingt durch das homogene Gleichungssystem (1428) einen qualitativen Charakter, d.h. die Auslenkungen sind nicht absolut zu sehen.



**Bild A.66.** Darstellung der Knickform der kleinsten Knicklast

### ⑤ Eigenform bzw. Knickform des größten Eigenwertes

Einsetzen des größten Eigenwertes  $\lambda_1 = 1/2 (3 + 5\sqrt{5}) lk/F$  in die Matrix nach (1420) führt auf:

$$k \begin{bmatrix} 2f & 0 & -f & 0 \\ 0 & -2 - \sqrt{5} & 0 & \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \\ -f & 0 & f & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) & 0 & -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1428)$$

Mit  $v_3 = t$  ergibt sich:

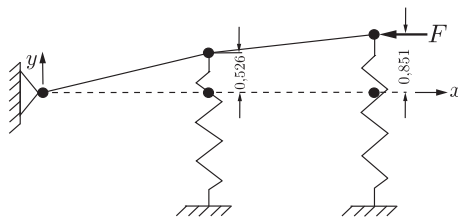
$${}^1\vec{u} = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1429)$$

$$|{}^1\vec{u}| = \frac{1}{2} t \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = 1 \Rightarrow t = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \quad (1430)$$

Damit erhält man den Eigenvektor als Einheitsvektor  ${}^1\vec{e}_u$

$${}^1\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{5} - 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,526 \\ 0 \\ 0,851 \end{bmatrix} \quad (1431)$$

Die Knickform ist in Bild A.67 dargestellt.



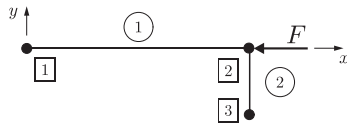
**Bild A.67.** Darstellung der Knickform der größten Knicklast

➤ **A.11.2 Knickbeispiel II (Balken)**

371

⊗ **Elastische und geometrische Steifigkeitsmatrizen**

Der Kragbalken wird in ein Balkenelement und die Feder in ein Stabelement eingeteilt:



**Bild A.68.** Einteilung von Balken und Feder in jeweils ein Element

Mit Hilfe von (923) auf der S. 368 wird der Balken beschrieben. Mit den bekannten Verformungen  $u_1 = v_1 = \varphi_1 = 0$  und der Tatsache, daß die Längssteifigkeit des Balkens keinen Einfluß auf das Knickverhalten hat, ergibt sich:

$$\hat{\underline{K}}_1 = \begin{bmatrix} v_2 & \varphi_2 \\ 12J - \frac{6F}{5l}\lambda & -6Jl + \frac{F}{10}\lambda \\ -6Jl + \frac{F}{10}\lambda & 4Jl^2 - \frac{2}{15}Fl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (1432)$$

Die Feder wird nur über die elastische Steifigkeitsmatrix beschrieben. Die Längskraft der Feder ist Null, so daß die geometrische Steifigkeitsmatrix eine Nullmatrix ist.

$$\underline{K}_2 = fJ \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1433)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die Überlagerung der beiden Matrizen führt auf:

$$\hat{\underline{K}}_g = \left[ \begin{array}{c|c} v_2 & \varphi_2 \\ \hline (12+f)J - \frac{6F}{5l}\lambda & -6Jl + \frac{F}{10}\lambda \\ -6Jl + \frac{F}{10}\lambda & 4Jl^2 - \frac{2}{15}F\lambda \end{array} \right] \begin{matrix} v_2 \\ \varphi_2 \end{matrix} \quad (1434)$$

⊙ **Eigenwert und kritische Knickkraft**

Die charakteristische Gleichung mit  $|\hat{\underline{K}}_g| = 0$  führt auf die Eigenwerte des Systems:

$$|\hat{\underline{K}}_g| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{8(39+f)lJ}{9F}\lambda + \frac{240(3+f)l^2J^2}{9F^2} = 0 \quad (1435)$$

Daraus ergeben sich die beiden Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = \left( 156 + 4f \pm 4\sqrt{1116 - 57f + f^2} \right) \frac{lJ}{9F} \quad (1436)$$

Es ist für die kritische Knicklast  $F_K$  nur der kleinste Eigenwert von Interesse:

$$F_K = \lambda_{\min} F = \left( 156 + 4f - 4\underbrace{\sqrt{1116 - 57f + f^2}}_{\psi} \right) \frac{EI}{9l^2} \quad (1437)$$

⊙ **Knickkräfte für die Eulerfälle I und III**

In (1437) sind die beiden Eulerfälle I und III enthalten. Eulerfall I ergibt sich für  $f = 0$ :

$$F_{K_I} = \left( 156 - 4\sqrt{1116} \right) \frac{EI}{9l^2} = 2,486 \frac{EI}{l^2} \quad (1438)$$

Die Lösung stimmt mit der in (927) auf der S. 369 überein.

$$F_{K_{III}} = \lim_{f \rightarrow \infty} F_K = \frac{EI}{9l^2} \lim_{f \rightarrow \infty} \left( 156 + 4f - 4\sqrt{1116 - 57f + f^2} \right) = 30 \frac{EI}{l^2} \quad (1439)$$

Diese Lösung läßt sich leicht mit dem Programm „Knicken\_Balken“ in „CALL\_for\_FEM“ verifizieren. Sie weist noch einen Fehler von 48,5 % auf.





⊙ **Eigenvektor**

Der kleinste Eigenwert  $\lambda_{min}$  wird in (1434) eingesetzt und das folgende homogene Gleichungssystem zur Bestimmung des Eigenvektors  $\vec{v}$  gebildet:

$$\frac{J}{135} \left[ \begin{array}{c|c} -1188 + 63f + 72\psi & [-576 + 6(f - \psi)]l \\ \hline [-576 + 6(f - \psi)]l & [228 + 8(1 - f)]l^2 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (1440)$$

Daraus ergibt sich der folgende Eigenvektor:

$$\vec{v} = t \left[ \begin{array}{c} \frac{2(f - 24 - \psi)l}{3(f - 60)} \\ 1 \end{array} \right] \quad (1441)$$

Zur Bestimmung von  $t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , wird der Vektor  $\vec{v}$  in einen Einheitsvektor überführt:

$$t = \frac{3(f - 60)}{\hat{t}} \quad (1442)$$

Mit der Abkürzung  $\hat{t}$  als:

$$\hat{t} = \sqrt{32400 + (9 + 4l^2)f^2 - [1080 + 8(24 + \psi)l^2]f + 4(576 + 48\psi + \psi^2)l^2} \quad (1443)$$

Damit ergibt sich der Einheitseigenvektor zu:

$$\vec{e}_v = \left[ \begin{array}{c} e_v \\ e_\varphi \end{array} \right] = \frac{1}{\hat{t}} \left[ \begin{array}{c} 2(f - 24 - \psi)l \\ 3(f - 60) \end{array} \right] \quad (1444)$$

⊙ **Knickform**

Die Knickform wird mit Hilfe der Formfunktionen des zweiknotigen Balkens (s. (386) auf der S. 146) gebildet. Bedingt durch die Einspannung ( $v_1 = \varphi_1 = 0$ ) gilt:

$$\bar{v} = N_3 e_v + N_4 e_\varphi = \frac{l(36 + 3f - 6\psi)\xi^2 - l(84 + f - 4\psi)\xi^3}{\hat{t}} \quad (1445)$$

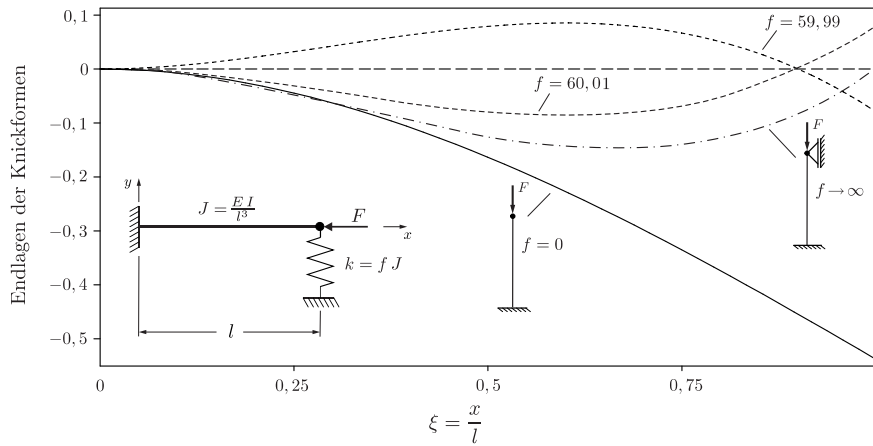
Hierin sind die Eulerfälle *I* und *III* enthalten. Den Eulerfall *I* erhält man mit  $f = 0$ :

$$\bar{v}_I = \frac{3(1 - \sqrt{31}) + (2\sqrt{31} - 7)\xi}{\sqrt{225 + (47 + 8\sqrt{31})l^2}} l \xi^2 \quad (1446)$$

Der Eulerfall *III* ergibt sich zu:

$$\bar{v}_{III} = \lim_{f \rightarrow \infty} \bar{v} = (\xi - 1) l \xi^2 \quad (1447)$$

Die Endlagen dieser beiden Knickformen wie auch die Knickformen für Zwischenwerte für  $f$  sind in Bild A.69 dargestellt.



**Bild A.69.** Knickformen der Eulerfälle *I* und *III*. Für  $f = 60$  existiert eine Polstelle

Die Diskussion von  $\bar{v}$  zeigt für  $\bar{v} = 0$  folgende Lösung:

$$\bar{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi = 3 \frac{-12 - f + 2\psi}{-84 - f + 4\psi} \quad (1448)$$

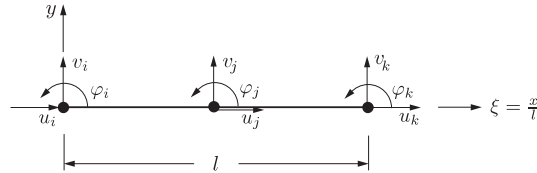
Für  $f > 24$  weist diese Funktion im Intervall  $0 < \xi \leq 1$  eine Lösung auf, d.h. die Knickform besitzt in diesem Intervall einen Nulldurchgang. Die Knickform selber besitzt für  $f = 60$  eine Polstelle. Es existiert hierfür keine Lösung. In Bild (A.69) sind für  $f = 59,99$  und  $J = 60,01$  die zugehörigen Knickformen dargestellt. Für  $f \rightarrow \infty$  wirkt die Feder wie ein Auflager an der Stelle  $\xi = 1$ . Dies ist dann die Knickform des Eulerfalles *III*.

➤ **A.11.3 Knickbeispiel III (Dreiknotiges Balkenelement)**

371

⊗ **Formfunktion des dreiknotigen Balkens**

Die Freiheitsgrade des dreiknotigen Elementes sind in Bild (A.70) aufgeführt.



**Bild A.70.** Das dreiknotige Element mit seinen Freiheitsgraden. Der E-Modul  $E$ , das Flächenträgheitsmoment  $I$  und die Fläche  $A$  sind konstant im Element

Die Formfunktionen des dreiknotigen Balkenelementes lassen sich mit Hilfe des Programmes „Balken\_1D“ erzeugen und lauten:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 - 23\xi^2 + 66\xi^3 - 68\xi^4 + 24\xi^5 \\
 N_2 &= (1 - 6\xi + 13\xi^2 - 12\xi^3 + 4\xi^4)\xi l \\
 N_3 &= (1 - 2\xi + \xi^2)16\xi^2 \\
 N_4 &= (-1 + 4\xi - 5\xi^2 + 2\xi^3)8\xi^2 l \\
 N_5 &= (7 - 34\xi + 52\xi^2 - 24\xi^3)\xi^2 \\
 N_6 &= (-1 + 5\xi - 8\xi^2 + 4\xi^3)\xi^2 l
 \end{aligned} \tag{1449}$$

Nach (900) auf der S. 360 lassen sich daraus die Steifigkeitsmatrizen  ${}^s\mathbf{K}_E$ ,  ${}^b\mathbf{K}_E$  und  $\mathbf{K}_G$  gewinnen. Zur Erstellung der Steifigkeitsmatrix des Stabes  ${}^s\mathbf{K}_E$  muß nach (900) das dyadische Produkt  $\vec{N}'_u(\vec{N}'_u)^T$  gebildet werden. Es ergibt sich:

$$\vec{N}'_u(\vec{N}'_u)^T = \frac{1}{l^2} \begin{bmatrix} (-3+4\xi)^2 & 0 & 0 & (-3+4\xi)(4-8\xi) & 0 & 0 & (-3+4\xi)(-1+4\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-3+4\xi)(-1+4\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-3+4\xi)(4-8\xi) & 0 & 0 & (4-8\xi)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (4-8\xi)(-1+4\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (-3+4\xi)(-1+4\xi) & 0 & 0 & (4-8\xi)(-1+4\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-1+4\xi)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1450}$$

⊗ **Steifigkeitsmatrix des Stabes**

Durch Integration über die Länge des Elementes in (1450) erhält man die Steifigkeitsmatrix  ${}^s\mathbf{K}_E$ , die den Stabanteil im Element wiedergibt:

$${}^s\mathbf{K}_E = \frac{AE}{3l} \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1451)$$

⊗ **Steifigkeitsmatrix des Balkens**

Aus dem zweiten Summanden aus (900) erhält man die Steifigkeitsmatrix  ${}^b\mathbf{K}_E$ , die den Biegeanteil repräsentiert. Dazu muß das dyadische Produkt  $\vec{N}_v''(\vec{N}_v'')^T$  gebildet werden. Die Integration über diesen Ausdruck führt unter Beachtung des Faktors  $EI$  zu folgender Steifigkeitsmatrix  ${}^b\mathbf{K}_E$ :

$${}^b\mathbf{K}_E = \frac{2EI}{35l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2546 & 569l & 0 & -1792 & 960l & 0 & -754 & 121l \\ 0 & 569l & 166l^2 & 0 & -448l & 160l^2 & 0 & -121l & 19l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1792 & -448l & 0 & 3584 & 0 & 0 & -1792 & 448l \\ 0 & 960l & 160l^2 & 0 & 0 & 640l^2 & 0 & -960l & 160l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -754 & -121l & 0 & -1792 & -960l & 0 & 2546 & -569l \\ 0 & 121l & 19l^2 & 0 & 448l & 160l^2 & 0 & -569l & 166l^2 \end{bmatrix} \quad (1452)$$

⊗ **Geometrische Steifigkeitsmatrix**

Der dritte Summand aus (900) führt auf die geometrische Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_G$ :

$$\underline{K}_G = \frac{P}{630l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1668 & 39l & 0 & -1536 & 240l & 0 & -132 & -9l \\ 0 & 39l & 28l^2 & 0 & -48l & -8l^2 & 0 & 9l & -5l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1536 & -48l & 0 & 3072 & 0 & 0 & -1536 & 48l \\ 0 & 240l & -8l^2 & 0 & 0 & 256l^2 & 0 & -240l & -8l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -132 & 9l & 0 & -1536 & -240l & 0 & 1668 & -39l \\ 0 & -9l & -5l^2 & 0 & 48l & -8l^2 & 0 & -39l & 28l^2 \end{bmatrix} \quad (1453)$$

⊗ **Überlagerung der Steifigkeitsmatrizen**

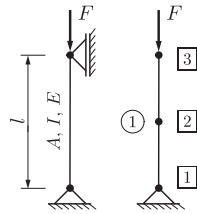
Die Addition der Matrizen  ${}^s\underline{K}_E$  und  ${}^b\underline{K}_E$  führt zur elastischen Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_E$ . Sie enthält einen Stab- und einen Balkenanteil:

$$\underline{K}_E = \frac{E}{105l^3} \begin{bmatrix} 245Al^2 & 0 & 0 & -280Al^2 & 0 \\ 0 & 15276I & 3414Il & 0 & -10752I \\ 0 & 3414Il & 996Il^2 & 0 & -2688Il \\ -280Al^2 & 0 & 0 & 560Al^2 & 0 \\ 0 & -10752I & -2688Il & 0 & 21504I \\ 0 & 5760Il & 960Il^2 & 0 & 0 \\ 35Al^2 & 0 & 0 & -280Al^2 & 0 \\ 0 & -4524I & -726Il & 0 & -10752I \\ 0 & 726Il & 114Il^2 & 0 & 2688Il \end{bmatrix} \quad (1454)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 35Al^2 & 0 & 0 \\ 5760Il & 0 & -4524I & 726Il \\ 960Il^2 & 0 & -726Il & 114Il^2 \\ 0 & -280Al^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10752I & 2688Il \\ 3840Il^2 & 0 & -5760Il & 960Il^2 \\ 0 & 245Al^2 & 0 & 0 \\ -5760Il & 0 & 15276I & -3414Il \\ 960Il^2 & 0 & -3414Il & 996Il^2 \end{bmatrix}$$

⊗ **Eulerfall II**

In Bild A.71 ist ein Knickfall dargestellt, der dem Eulerfall *II* entspricht. Der Balken ist in ein dreiknotiges Balkenelement eingeteilt.



**Bild A.71.** Einteilung des Balkens für den Eulerfall *II* in ein dreiknotiges Element

Die untere Einspannung des Balkens ( $u_1 = v_1 = 0$ ) führt dazu, daß die ersten beiden Zeilen und Spalten in (1453) und (1454) gestrichen werden können. Die obere Einspannung ( $v_3 = 0$ ) sowie die Tatsache, daß Längsverschiebungen keine Rolle spielen, ermöglicht die Elimination der Zeilen und Spalten vier, sieben und acht. Daraus ergeben sich die beiden nachfolgenden Matrizen:

$$\hat{\underline{K}}_E = \frac{2EI}{35l^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \hline 166l^2 & -448l & 160l^2 & 19l^2 \\ -448l & 3584 & 0 & 448l \\ \hline 160l^2 & 0 & 640l^2 & 160l^2 \\ 19l^2 & 448l & 160l^2 & 166l^2 \end{array} \begin{array}{l} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array} \quad (1455)$$

$$\hat{\underline{K}}_G = \frac{\lambda F}{630l} \begin{array}{c} \begin{array}{cc|cc} \varphi_1 & v_2 & \varphi_2 & \varphi_3 \\ \hline -28l^2 & 48l & 8l^2 & 5l^2 \\ 48l & -3072 & 0 & -48l \\ \hline 8l^2 & 0 & -256l^2 & 8l^2 \\ 5l^2 & -48l & 8l^2 & -28l^2 \end{array} \begin{array}{l} \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array} \end{array} \quad (1456)$$

Die Addition von  $\hat{\underline{K}}_E$  und  $\hat{\underline{K}}_G$  zu  $\hat{\underline{K}}_g = \hat{\underline{K}}_E + \lambda \hat{\underline{K}}_G$  führt auf:

$$\underline{\hat{K}}_g = \frac{1}{630 l^3} \left[ \begin{array}{c|c} 5976 l^2 EI - 28 l^4 F \lambda & -16128 l EI + 48 l^3 F \lambda \\ \hline -16128 l EI + 48 l^3 F \lambda & 129024 EI - 3072 l^2 F \lambda \\ \hline 5760 l^2 EI + 8 l^4 F \lambda & 0 \\ \hline 684 l^2 EI + 5 l^4 F \lambda & 16128 l EI - 48 l^3 F \lambda \end{array} \right] \quad (1457)$$

$$\left[ \begin{array}{c|c} 5760 l^2 EI + 8 l^4 F \lambda & 684 l^2 EI + 5 l^4 F \lambda \\ \hline 0 & 16128 l EI - 48 l^3 F \lambda \\ \hline 23040 l^2 EI - 256 l^4 F \lambda & 5760 l^2 EI + 8 l^4 F \lambda \\ \hline 5760 l^2 EI + 8 l^4 F \lambda & 5976 l^2 EI - 28 l^4 F \lambda \end{array} \right]$$

② **Charakteristische Gleichung**

Über die Determinante  $|\underline{\hat{K}}_g|$  gewinnt man die charakteristische Gleichung:

$$\lambda^4 - 600 \frac{EI}{F l^2} \lambda^3 + 92400 \frac{(EI)^2}{F^2 l^4} \lambda^2 - 3427200 \frac{(EI)^3}{F^3 l^6} \lambda + 25401600 \frac{(EI)^4}{F^4 l^8} = 0 \quad (1458)$$

Der kleinste Eigenwert aus (1458) hat den Wert:

$$\lambda_{min} = 9,8751 \frac{EI}{F l^2} \quad (1459)$$

Die bezogene Knicklast  $F_k^* = F_K l^2 / (EI) = 9,8751$  weist einen Fehler von 0,056% auf.

③ **Eulerfall IV**

In Bild (A.72) ist ein Knickfall dargestellt, der dem Eulerfall IV entspricht. Der Balken ist in ein dreiknotiges Element eingeteilt.

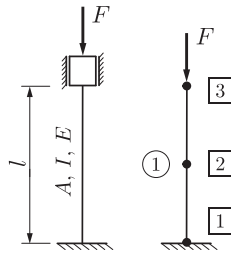


Bild A.72. Einteilung des Balkens für den Eulerfall IV in ein dreiknotiges Element

Die feste Einspannung im Eulerfall *IV* führt dazu, daß aus (1454) die ersten drei Zeilen und Spalten gestrichen werden. Die Einspannung am oberen Ende ermöglicht das Streichen der letzten beiden Zeilen und Spalten. Die Verschiebungen in Längsrichtung beeinflussen die Lösung nicht, so daß die Zeilen und Spalten vier und sieben ebenfalls gestrichen werden können. Übrig bleibt die nachfolgende Matrix:

$$\hat{\underline{K}}_E = \frac{256EI}{35l^3} \begin{array}{c|c} v_2 & \varphi_2 \\ \hline 28 & 0 \\ 0 & 5l^2 \end{array} \begin{array}{l} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \quad (1460)$$

Aus der geometrischen Steifigkeitsmatrix nach (1453) werden wie zuvor Spalten und Zeilen gestrichen. Die innere Kraft  $P$  wird über die äußere Kraft als  $P = -F$  ausgedrückt und in (1453) eingesetzt:

$$\hat{\underline{K}}_G = -\frac{128F\lambda}{315l} \begin{array}{c|c} v_2 & \varphi_2 \\ \hline 12 & 0 \\ 0 & l^2 \end{array} \begin{array}{l} v_2 \\ \varphi_2 \end{array} \quad (1461)$$

Die Addition  $\hat{\underline{K}}_E + \lambda \hat{\underline{K}}_G$  führt auf die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\hat{\underline{K}}_g$ :

$$\hat{\underline{K}}_g = \frac{128F}{315l^3} \left[ \begin{array}{c|c} 504EI - 12F l^2 \lambda & 0 \\ \hline 0 & 90EI l^2 - F l^4 \lambda \end{array} \right] \quad (1462)$$

⑤ **Charakteristische Gleichung**

Aus der Determinanten  $|\hat{\underline{K}}_g|$  erhält man die charakteristische Gleichung:

$$\frac{128F}{315l^3} (504EI - 12F l^2 \lambda) (90EI l^2 - F l^4 \lambda) = 0 \quad (1463)$$

Die Nullstellen voranstehender Gleichung ergeben die beiden Eigenwerte:

$$\lambda_1 = \frac{42EI}{Fl^2} ; \quad \lambda_2 = \frac{90EI}{Fl^2} \quad (1464)$$



Hiervon ist technisch der kleinere Eigenwert  $\lambda_{min} = \lambda_1$  von Bedeutung. Die bezogene Knicklast  $F_k^* = F_K l^2 / (EI) = 42$  weist einen Fehler von 6,4% auf.

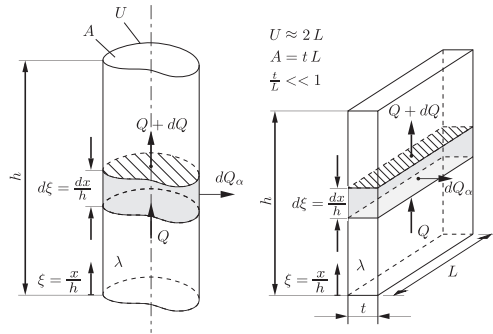


## A.12 Beispiele zu Feldproblemen

A.12

### ➤ A.12.1 Wärmeübertragungsbeispiel I

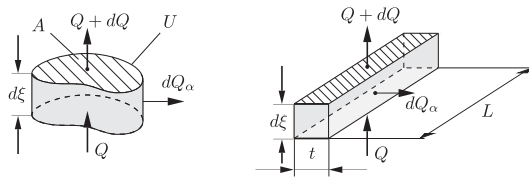
389



**Bild A.73.** Stabrippe bzw. Längsrippe umgeben von einem Medium

In Bild (A.73) sind zwei Formen von Kühlrippen dargestellt. Die Temperaturverteilung in der Rippe wird mit ein und derselben Differentialgleichung beschrieben. Die Rippe ist von einem Medium mit der Temperatur  $T_u$  umgeben. Es bildet sich auf den Oberflächen Konvektion aus. An der Stelle  $\xi = 0$  ist die Temperatur mit  $T_f$  bekannt. Es werden folgende Vereinfachungen getroffen:

- Die Temperatur ist nur eine Funktion von  $\xi$
- Die Wärmeübergangszahl  $\alpha$  ist über die Höhe  $h$  konstant
- Die Wärmeabgabe über die Stirnfläche der Stabrippe wird vernachlässigt. Ebenso die Wärmeabgabe über die Stirnseiten und obere Stirnfläche der Längsrippe



**Bild A.74.** Betrachtung der Wärmeflüsse an einem Volumenelement

Es wird aus den Körpern (s. Bild A.73) jeweils ein Volumenelement (s. Bild A.74) der Länge  $d\xi = dx/h$  betrachtet. Das Gleichgewicht des Wärmeflusses  $Q$  lautet:

$$Q - (Q + dQ) - dQ_\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad dQ + dQ_\alpha = 0 \quad (1465)$$

Die Ableitung der Fourier'schen Gleichung und die Beziehung für die Konvektion<sup>1</sup> führt zu:

$$\frac{dQ}{dx} = -A\lambda \frac{d^2T}{dx^2}; \quad \frac{dQ_\alpha}{dx} = \alpha U(T - T_u) \quad (1466)$$

Einsetzen in Gleichung (1465) ergibt:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{U\alpha}{A\lambda}(T - T_u) = 0 \quad (1467)$$

Es wird eine neue Variable  $\vartheta = T - T_u$  eingeführt:

$$\frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{U\alpha}{A\lambda}\vartheta = 0 \quad (1468)$$

⊙ **Dimensionslose Differentialgleichung**

Die Temperatur  $\vartheta$  wird auf  $T_f$  bezogen. mit  $\bar{\vartheta} = \vartheta/T_f$  und  $dx = h d\xi$  ergibt sich:

$$\frac{1}{h^2} T_f \frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\xi^2} - \frac{\alpha U}{\lambda A} T_f \bar{\vartheta} = 0; \quad \frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\xi^2} - \frac{\alpha h}{\lambda} \frac{U}{\frac{A}{h^2}} \bar{\vartheta} = 0; \quad \frac{d^2\bar{\vartheta}}{d\xi^2} - \underbrace{\bar{\alpha} \frac{\bar{U}}{\bar{A}}}_{\bar{m}^2} \bar{\vartheta} = 0 \quad (1469)$$

Folgende Ansatzfunktion stellt eine allgemeine Lösung von (1469) dar:

$$\bar{\vartheta} = C_1 e^{\bar{m}\xi} + C_2 e^{-\bar{m}\xi} \quad (1470)$$

Die Koeffizienten  $C_1$  und  $C_2$  werden über folgende Randbedingungen bestimmt:

$$\bar{\vartheta}(\xi = 0) = g = \frac{T_f - T_u}{T_f}; \quad \frac{d\bar{\vartheta}}{d\xi}(\xi = 1) = 0 \quad (1471)$$

Damit gewinnt man:

$$C_1 + C_2 = g; \quad C_1 e^{\bar{m}} + C_2 e^{-\bar{m}} = 0 \quad (1472)$$

Daraus ergibt sich für  $C_1$  und  $C_2$

---


$$^1 q_\alpha = \alpha(T - T_u); \quad dQ_\alpha = q_\alpha dA = q_\alpha U dx; \quad dQ_\alpha = U\alpha(T - T_u) dx$$

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \frac{e^{-\bar{m}}}{e^{\bar{m}} + e^{-\bar{m}}} g = \frac{e^{-\bar{m}}}{2 \cosh(\bar{m})} g \\
 C_2 &= \frac{e^{\bar{m}}}{e^{\bar{m}} + e^{-\bar{m}}} g = \frac{e^{\bar{m}}}{2 \cosh(\bar{m})} g
 \end{aligned} \tag{1473}$$

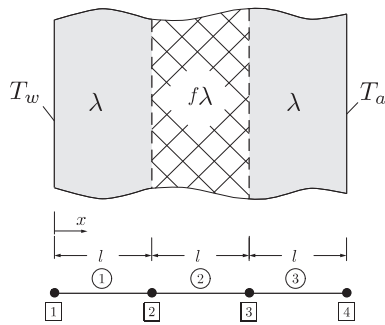
Einsetzen von (1473) in (1470) führt zu:

$$\bar{\vartheta} = \frac{\cosh(\bar{m}(\xi - 1))}{\cosh(\bar{m})} g \quad \text{mit} \quad g = \frac{T_f - T_u}{T_f} \tag{1474}$$

### ➤ A.12.2 Wärmeübertragungsbeispiel II

Die Wanddicke ist in zwei Richtungen unendlich ausgedehnt, so daß in diese Richtungen keine Wärme fließt. Das Problem hat somit einen eindimensionalen Charakter.

390



**Bild A.75.** Wärmeleitung durch eine in zwei Richtungen unendlich ausgedehnte Wand mit einer Isolationsschicht und die Einteilung in drei eindimensionale Elemente

### ➤ Steifigkeitsmatrizen

Durch die Kenntnis der beiden Wandtemperaturen  $T_w$  und  $T_a$  ist das Konvektionsproblem ausgeklammert. Es tritt damit im Element nach (960) auf der S. 384 nur die Wärmeleitungsmatrix  $K_w$  auf:

$$\underline{K}_{w_1} = \underline{K}_{w_3} = \frac{A\lambda}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \end{matrix} ; \quad \underline{K}_{w_2} = \frac{Af\lambda}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} T_2 \\ T_3 \end{matrix} \tag{1475}$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

$$\underline{K}_g = \frac{A\lambda}{l} \begin{array}{c|c|c|c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1+f & -f & 0 \\ \hline 0 & -f & 1+f & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{array} \quad (1476)$$

⊗ **Rechte Seite**

Die rechte Seite ist zunächst ein Nullvektor, denn es wird den Rändern kein Wärmeübergang aufgeprägt. Zudem existieren keine Wärmequellendichten oder Punktwärmequellen. Der Temperaturvektor  $\vec{T}$  wird zerlegt in  $\vec{\tilde{T}}$  und  ${}^0\vec{T}$ .  ${}^0\vec{T}$  enthält die bekannten Temperaturen  $T_w$  und  $T_a$ ,  $\vec{\tilde{T}}$  dagegen die unbekannten Temperaturen  $T_2$  und  $T_3$ .

$$\vec{T} = \vec{\tilde{T}} + {}^0\vec{T} = \begin{bmatrix} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_w \\ 0 \\ 0 \\ T_a \end{bmatrix} \quad (1477)$$

Der auf der rechten Seite auftretende Vektor  ${}^R\vec{Q}$  enthält die Wärmeflüsse an den Knoten 1 und 4. Damit kann man schreiben:

$$\underline{K}_g \left( \vec{\tilde{T}} + {}^0\vec{T} \right) = {}^R\vec{Q} \Rightarrow \underline{K}_g \vec{\tilde{T}} = -\underline{K}_g {}^0\vec{T} + {}^R\vec{Q} \quad (1478)$$

Das Produkt  $\underline{K}_g {}^0\vec{T}$  wird mit Hilfe der Matrix  $\underline{K}_g$  aus (1476) gebildet:

$$\underline{K}_g {}^0\vec{T} = \frac{A\lambda}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+f & -f & 0 \\ 0 & -f & 1+f & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_w \\ 0 \\ 0 \\ T_a \end{bmatrix} = \frac{A\lambda}{l} \begin{bmatrix} T_w \\ -T_w \\ -T_a \\ T_a \end{bmatrix} \quad (1479)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix nach dem Einbringen der bekannten Temperaturen**

Die Gl. (1478) hat damit folgendes Aussehen:

$$\frac{A\lambda}{l} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1+f & -f & 0 \\ \hline 0 & -f & 1+f & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 0 \\ T_2 \\ T_3 \\ 0 \end{array} \right] = \frac{A\lambda}{l} \left[ \begin{array}{c} -T_w \\ T_w \\ T_a \\ -T_a \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} {}^RQ_1 \\ 0 \\ 0 \\ {}^RQ_4 \end{array} \right] \quad (1480)$$

Aus dem Gleichungssystem werden die erste und letzte Spalte und Zeile gestrichen. Damit erhält man:

$$\left[ \begin{array}{c|c} 1+f & -f \\ \hline -f & 1+f \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_2 \\ T_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} T_w \\ T_a \end{array} \right] \quad (1481)$$

⊗ **Temperaturen**

Die Temperaturen  $T_2$ ,  $T_3$  lassen sich durch Inversion der Matrix aus (1481) gewinnen:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{c} T_2 \\ T_3 \end{array} \right] &= \frac{1}{1+2f} \left[ \begin{array}{c|c} 1+f & f \\ \hline f & 1+f \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_w \\ T_a \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{1+2f} \left[ \begin{array}{c} (1+f)T_w + fT_a \\ fT_w + (1+f)T_a \end{array} \right] \end{aligned} \quad (1482)$$

⊗ **Wärmestrom**

Aus (1480) werden die Wärmeströme  ${}^RQ_1$  und  ${}^RQ_4$  berechnet:

$$\left[ \begin{array}{c} {}^RQ_1 \\ 0 \\ 0 \\ {}^RQ_4 \end{array} \right] = \frac{A\lambda}{l} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1+f & -f & 0 \\ \hline 0 & -f & 1+f & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_w \\ \frac{(1+f)T_w + fT_a}{1+2f} \\ \frac{fT_w + (1+f)T_a}{1+2f} \\ T_a \end{array} \right] =$$

$$\frac{A\lambda}{l} \frac{f}{1+2f} (T_w - T_a) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1483)$$

Der Wärmestrom ist positiv, wenn er in den Körper fließt. Entsprechend negativ, wenn er aus dem Körper herausfließt. Alternativ kann der Wärmestrom berechnet werden, indem von Element 1 die erste Zeile mit den Temperaturen des Elementes 1 multipliziert wird.

$$\frac{A\lambda}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_w \\ \frac{T_w(1+f) + f T_a}{1+2f} \end{bmatrix} = \frac{A\lambda}{l} \frac{f}{1+2f} (T_w - T_a) \quad (1484)$$

⊗ **Wärmestromdichte**

Die Wärmestromdichte gewinnt man, indem in (1484) der Wärmestrom auf die Fläche  $A$  bezogen wird.

$$q = \frac{\lambda}{l} \frac{f}{1+2f} (T_w - T_a) \quad (1485)$$

Die Wärmedichte  $q$  ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen der Innen- und Außenwand. Sie verhält sich umgekehrt proportional zur Wanddicke  $l$ .

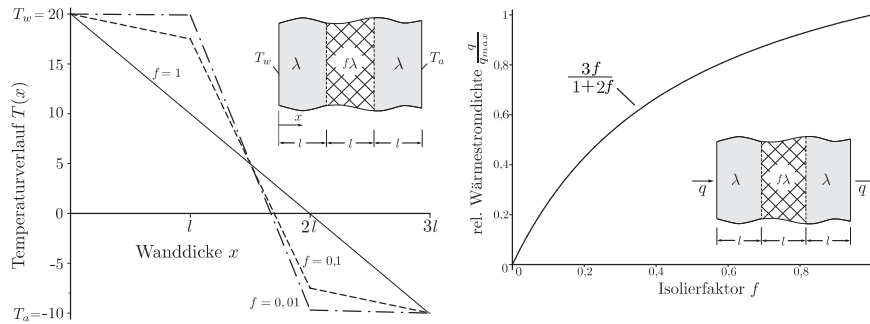
⊗ **Darstellung des Temperaturverlaufes und der relativen Wärmestromdichte**

Für den Verlauf der Temperatur  $T = T(x, f)$  wird eine Innenwandtemperatur  $T_w = 20$  und eine Außenwandtemperatur  $T_a = -10$  angenommen. Für  $f = 1; 0,1$  und  $0,01$  sind die Temperaturverläufe in der linken Bildhälfte von A.76 dargestellt. Die Temperaturverteilung ist von der Länge  $l$  und der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  unabhängig. Der Verlauf im Element wird mit Hilfe der Formfunktion (946) beschrieben und ist linear verteilt. Die relative Wärmestromdichte setzt die Wärmestromdichte zu der maximal möglichen bei  $f=1$  in Beziehung.

$$\frac{q}{q_{max}} = \frac{q(f)}{q(f=1)} = \frac{\frac{\lambda}{l} \frac{f}{1+2f} (T_w - T_a)}{\frac{\lambda}{3l} (T_w - T_a)} = \frac{3f}{1+2f} \quad (1486)$$



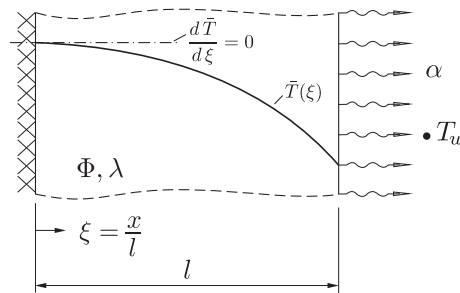
Sie ist in der rechten Hälfte von Bild A.76 in Abhängigkeit von dem Isolierfaktor  $f$  angeführt.



**Bild A.76.** Die Temperaturverteilung über die Wanddicke und die relative Wärmestromdichte

### ➤ A.12.3 Wärmeübertragungsbeispiel III

391



**Bild A.77.** Temperaturverlauf in einer Wand mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und der Wärmequellendichte  $\Phi$

### ➤ Lösung aus der Differentialgleichung

Die dimensionslose Form der Differentialgleichung des Problems lautet:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} + \bar{\Phi} = 0 \quad \text{mit} \quad \bar{T} = \frac{T}{T_u} \quad \text{und} \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi l^2}{\lambda T_u} \quad (1487)$$

Zweimaliges Integrieren von (1487) führt auf:

$$\bar{T}(\xi) = -\frac{1}{2} \bar{\Phi} \xi^2 + C_1 \xi + C_2 \quad (1488)$$

Die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  werden durch die nachfolgenden Randbedingungen bestimmt.

⊗ **Randbedingungen**

Die Innenseite bei  $\xi = 0$  ist isoliert. Daraus folgt  $q = 0$ . Über die Fourier'sche Beziehung ergibt sich mit  $dx = l d\xi$ :

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_u}{l} \frac{d\bar{T}}{d\xi} \Rightarrow \bar{q} = q \frac{l}{\lambda T_u} = -\frac{d\bar{T}(\xi=0)}{d\xi} = 0 \quad (1489)$$

Aus der natürlichen Randbedingung:

$$\lambda \frac{dT}{dx} + \alpha (T - T_u) = 0 \quad (1490)$$

erhält man für die Stelle  $\xi = 1$  mit  $\bar{T} = T/T_u$  und  $dx = l d\xi$ :

$$\begin{aligned} \lambda \frac{T_u}{l} \frac{d\bar{T}(\xi=1)}{d\xi} + \alpha T_u (\bar{T}(\xi=1) - 1) &= 0 \\ \frac{d\bar{T}(\xi=1)}{d\xi} = \frac{\alpha l}{\lambda} (1 - \bar{T}(\xi=1)) &= \bar{\alpha} (1 - \bar{T}(\xi=1)) \end{aligned} \quad (1491)$$

Einsetzen dieser Randbedingung in (1488) führt zu folgender Lösung:

$$\bar{T}(\xi) = 1 + \frac{2 + \bar{\alpha}}{2\bar{\alpha}} \bar{\Phi} - \frac{1}{2} \bar{\Phi} \xi^2 \quad (1492)$$

⊗ **Methode von Ritz**

Es wird eine quadratische Ansatzfunktion  $\tilde{\bar{T}}(\xi)$  verwendet:

$$\tilde{\bar{T}}(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad (1493)$$

⊗ **Wesentliche Randbedingung**

$$\bar{q}(\xi=0) = -\frac{d\bar{T}}{d\xi}(\xi=0) = 0 \quad (1494)$$

Voranstehende Bedingung auf (1493) angewendet, führt auf  $a_1 = 0$ . Damit lautet die modifizierte Ansatzfunktion nach (1493):

$$\bar{T}(\xi) = a_0 + a_2 \xi^2 \quad (1495)$$

⊗ **Einsetzen der Ansatzfunktion in das Funktional**

Nachfolgendes dimensionsloses Funktional enthält die natürlichen Randbedingungen:

$$\bar{\Pi} = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{d\bar{T}}{d\xi} \right)^2 d\xi}_{\bar{\Pi}_w} - \underbrace{\bar{\Phi} \int_0^1 \bar{T} d\xi}_{\bar{\Pi}_\Phi} - \underbrace{\bar{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{T}(\xi=1) \right) \bar{T}(\xi=1)}_{\bar{\Pi}_q} \quad (1496)$$

Einsetzen der Ansatzfunktion nach (1495) in das Funktional (1496) führt zu folgenden Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_w &= \frac{2}{3} a_2^2 \\ \bar{\Pi}_\Phi &= \left( a_0 + \frac{1}{3} a_2 \right) \bar{\Phi} \\ \bar{\Pi}_q &= \bar{\alpha} (1 - a_2) a_0 + \bar{\alpha} a_2 - \frac{1}{2} \bar{\alpha} a_0^2 - \frac{1}{2} \bar{\alpha} a_2^2 \end{aligned} \quad (1497)$$

Damit erhält man  $\bar{\Pi}$  zu:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \bar{\Pi}_w - \bar{\Pi}_\Phi - \bar{\Pi}_q \\ &= \left( (a_2 - 1) \bar{\alpha} - \bar{\Phi} \right) a_0 - \left( \bar{\alpha} + \frac{\bar{\Phi}}{3} \right) a_2 + \frac{1}{2} \bar{\alpha} a_0^2 + \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{3}{4} \bar{\alpha} \right) a_2^2 \end{aligned} \quad (1498)$$

⊗ **Variation des Funktionals**

$$\delta \bar{\Pi} = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_0} \delta a_0 + \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_2} \delta a_2 = 0 \quad (1499)$$

Die Variation  $\delta \bar{\Pi}$  verschwindet dann und nur dann, wenn gilt:

$$\frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_0} = \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_2} = 0 \quad (1500)$$

Daraus ergeben sich die Gleichungen zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_0} &= -\bar{\alpha} - \bar{\Phi} + (a_0 + a_2) \bar{\alpha} = 0 \\ \frac{\partial \bar{\Pi}}{\partial a_2} &= -\bar{\alpha} - \frac{1}{3} \bar{\Phi} + \bar{\alpha} a_0 + \left( \frac{4}{3} + \bar{\alpha} \right) a_2 = 0 \end{aligned} \quad (1501)$$

Hieraus lassen sich die unbekannten Koeffizienten  $a_0$  und  $a_2$  bestimmen:

$$a_0 = 1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\bar{\alpha}} \right) \bar{\Phi} \quad ; \quad a_2 = -\frac{1}{2} \bar{\Phi} \quad (1502)$$

Daraus ergibt sich die Lösung für den gesuchten Temperaturverlauf:

$$\bar{T} = 1 + \frac{2 + \bar{\alpha}}{2\bar{\alpha}} \bar{\Phi} - \frac{1}{2} \bar{\Phi} \xi^2 \quad (1503)$$

Damit stimmt die Lösung nach Ritz mit der exakten Lösung nach (1492) überein.

⊗ **Wärmestromdichte  $\bar{q}$**

Die Wärmestromdichte  $\bar{q}(\xi)$  läßt sich aus (1489) berechnen:

$$\bar{q}(\xi) = -\frac{d\bar{T}}{d\xi} = \bar{\Phi} \xi \quad (1504)$$

⊗ **Lösung mittels FEM**

Das Problem soll mit dem zweiknotigen Element gelöst werden. Es werden nacheinander 1, 2 und 3 Elemente verwendet. Die Temperatur  $T$  hängt von folgenden Einflußgrößen ab:

$$T = T(l, A, \alpha, \lambda, \Phi, T_u) \quad (1505)$$

Als Bezugsgrößen werden gewählt:  $l, \lambda, T_u$ . Damit ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\frac{T}{T_u} = \bar{T} = \bar{T} \left( \frac{A}{l^2}, \frac{\alpha l}{\lambda}, \frac{\Phi l^2}{\lambda T_u} \right) = \bar{T}(\bar{A}, \bar{\alpha}, \bar{\Phi}) \quad (1506)$$

⊗ **Lösung mit drei Elementen**

$$\underline{K}_{w1} = \underline{K}_{w2} = \underline{K}_{w3} = 3 \bar{A} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right] \quad (1507)$$

$$\underline{K}_{k1} = \underline{K}_{k2} = \underline{0} \quad (1508)$$

$$\underline{K}_{k3} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \bar{A} \bar{\alpha} \end{array} \right] = \bar{A} \bar{\alpha} \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right] \quad (1509)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

$$\underline{K}_g = \bar{A} \left[ \begin{array}{c|c|c|c} \bar{T}_1 & \bar{T}_2 & \bar{T}_3 & \bar{T}_4 \\ \hline 3 & -3 & 0 & 0 \\ \hline -3 & 6 & -3 & 0 \\ \hline 0 & -3 & 6 & -3 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 3 + \bar{\alpha} \end{array} \right] \begin{array}{l} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{array} \quad (1510)$$

⊗ **Rechte Seite des Problems**

Aus der Wärmequellendichte  $\bar{\Phi}$  und der Konvektion entstehen nachfolgende Größen auf der rechten Seite. Für die Elemente 1 und 2 ergeben sich:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \frac{\bar{\Phi} \bar{A}}{6} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad (1511)$$

Für Element 3 erhält man:

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 2 \bar{\alpha} \bar{A} \end{array} \right] + \frac{\bar{\Phi} \bar{A}}{6} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right] \quad (1512)$$

Damit ergibt sich die gesamte rechte Seite zu:

$$\vec{F} = \bar{\alpha} \bar{A} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] + \frac{\bar{\Phi} \bar{A}}{6} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] = \frac{\bar{A}}{6} \left[ \begin{array}{c} \bar{\Phi} \\ 2\bar{\Phi} \\ 2\bar{\Phi} \\ \bar{\Phi} + 6\bar{\alpha} \end{array} \right] \quad (1513)$$

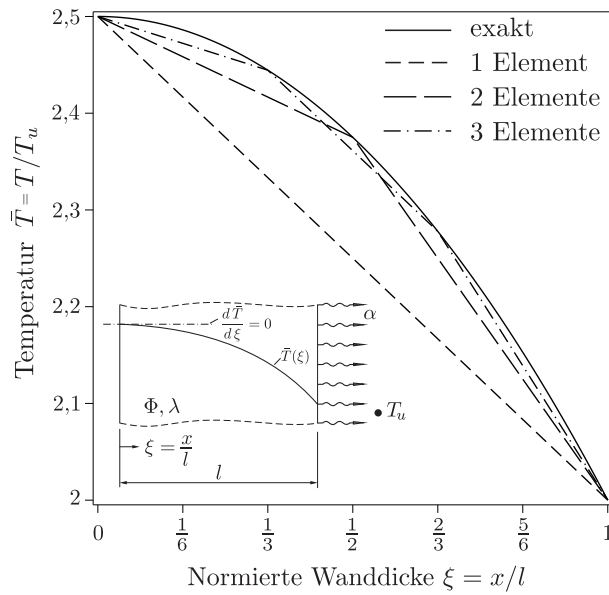
⊗ **Temperaturen**

Aus der Beziehung  $\underline{K} \vec{T} = \vec{F}$  lassen sich die dimensionslosen Knotentemperaturen berechnen:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 6 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 3 + \bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ 2\bar{\Phi} \\ 2\bar{\Phi} \\ \bar{\Phi} + 6\bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad (1514)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} + (1 + \frac{1}{2}\bar{\Phi})\bar{\alpha} \\ \bar{\Phi} + (1 + \frac{4}{9}\bar{\Phi})\bar{\alpha} \\ \bar{\Phi} + (1 + \frac{5}{18}\bar{\Phi})\bar{\alpha} \\ \bar{\Phi} + \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad (1515)$$

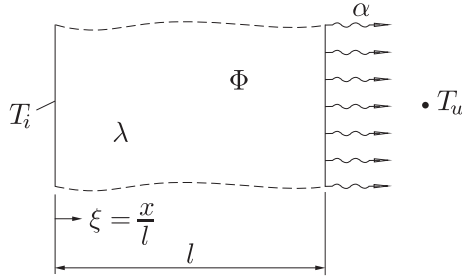
In Bild (A.78) sind die Temperaturverläufe aus den FE-Rechnungen der exakten Lösung gegenübergestellt.



**Bild A.78.** Gegenüberstellung der exakten Lösung und den Lösungen der FE-Rechnungen für 1, 2 und 3 Elemente mit  $\bar{\alpha} = \bar{\Phi} = 1$

➤ **A.12.4 Wärmeübertragungsbeispiel IV**

391



**Bild A.79.** Eindimensionales Feldproblem: Ausschnitt aus einer Wand mit einer Wärmequellendichte  $\Phi$

Das Bild A.79 zeigt eine Wand der Dicke  $l$  mit der inneren Wärmequellendichte  $\Phi$  und der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ . Die Annahme, daß die Wand in Tiefen- und Höhenrichtung unendlich ausgedehnt ist, führt auf ein eindimensionales Wärmeübertragungsproblem. Bekannt sind die innere Temperatur  $T_i$ , die Umgebungstemperatur  $T_u$ , die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , die Wärmequellendichte  $\Phi$  sowie der Wärmeübergangskoeffizient  $\alpha$  der natürlichen Konvektion auf der Außenwand.

Bei dem abgebildeten eindimensionalen Problem soll der Temperaturverlauf über die Dicke der Wand bestimmt werden. Dabei werden die Lösungen mittels Differentialgleichung und mit der Methode von Ritz ermittelt. Sie werden anschließend miteinander verglichen.

⑤ **Lösung des eindimensionalen Problems mittels einer Differentialgleichung**

Das Feldproblem der Wärmeübertragung kann mit Hilfe von (939) auf S. 377 geschrieben werden als:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \Phi = 0 \quad (1516)$$

Für den eindimensionalen Fall werden die Ableitungen in  $y$  und  $z$  Richtung weggelassen:

$$\frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + \Phi = 0 \quad (1517)$$

⑤ **Dimensionslose Differentialgleichung**

Die Beziehung (1517) soll dimensionslos gemacht werden. Dazu wird die Temperatur  $T$  auf die Innenwandtemperatur  $T_i$  bezogen ( $\bar{T} = T/T_i$ ):

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} + \frac{\Phi}{\lambda T_i} = 0 \quad (1518)$$

Hierbei wird vorausgesetzt, daß gilt:  $\lambda \neq \lambda(x)$ . Es wird die natürliche Koordinate  $\xi = x/l$  eingeführt:

$$\frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} + \underbrace{\frac{\Phi l^2}{\lambda T_i}}_{\bar{\Phi}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} + \bar{\Phi} = 0 \quad (1519)$$

Ebenfalls werden die natürlichen Randbedingungen des Problems dimensionslos gemacht:

$$\lambda \frac{dT}{dx} + q + \alpha (T - T_u) = 0 \quad (1520)$$

Mit  $\bar{T} = T/T_i$ ,  $x = l\xi$  und  $q = 0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lambda T_i \frac{d\bar{T}}{dx} + \alpha T_i (\bar{T} - \bar{T}_u) &= 0 \\ \frac{1}{l} \frac{d\bar{T}}{d\xi} + \frac{\alpha}{\lambda} (\bar{T} - \bar{T}_u) &= 0 \\ \frac{d\bar{T}}{d\xi} + \underbrace{\frac{\alpha l}{\lambda}}_{\bar{\alpha}} (\bar{T} - \bar{T}_u) &= 0 \end{aligned} \quad (1521)$$

⑤ **Lösung aus der Differentialgleichung**

Durch zweifaches Integrieren von (1519) erhält man:

$$\bar{T}(\xi) = -\frac{1}{2} \bar{\Phi} \xi^2 + C_1 \xi + C_2 \quad (1522)$$

Die aus der Integration resultierenden Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  gilt es nun mit Hilfe der Randbedingungen zu bestimmen. Die wesentliche Randbedingung lautet:

$$\bar{T}(\xi = 0) = 1 \quad (1523)$$

Einsetzen in (1522) führt auf:

$$\bar{T}(\xi = 0) = C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{T}(\xi) = 1 + C_1 \xi - \frac{1}{2} \bar{\Phi} \xi^2 \quad (1524)$$

Die natürliche Randbedingung ergibt sich aus (1521) für die Stelle  $\xi = 1$ :



$$\left. \frac{d\bar{T}}{d\xi} \right|_{\xi=1} = \bar{\alpha} \left( \bar{T}_u - \bar{T}|_{\xi=1} \right) \quad (1525)$$

Mit Hilfe von (1524) ergibt sich daraus:

$$C_1 - \bar{\Phi} = \bar{\alpha} (\bar{T}_u - 1 - C_1 + \frac{1}{2} \bar{\Phi}) \Rightarrow C_1 = \frac{(\bar{T}_u + \frac{1}{2} \bar{\Phi} - 1) \bar{\alpha} + \bar{\Phi}}{1 + \bar{\alpha}} \quad (1526)$$

Einsetzen von  $C_1$  in (1524) führt auf:

$$\bar{T}(\xi) = 1 + \frac{(\bar{T}_u + \frac{1}{2} \bar{\Phi} - 1) \bar{\alpha} + \bar{\Phi}}{1 + \bar{\alpha}} \xi - \frac{\bar{\Phi}}{2} \xi^2 \quad (1527)$$

mit:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad ; \quad \bar{T}_u = \frac{T_u}{T_i} \quad ; \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi l^2}{\lambda T_i} \quad ; \quad \xi = \frac{x}{l} \quad (1528)$$

② **Lösung des Problems mit der Methode von Ritz**

Nach (945) auf S. 380 lautet das Funktional für das vorliegende Problem:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dV - \int_V T \Phi dV = \int_V \mathcal{F}(T, T') dV \quad (1529)$$

Mit  $\bar{T} = T/T_i$  und  $x = \xi l$  ergibt sich die dimensionslose Form ( $\lambda \neq \lambda(\xi)$ ;  $\Phi \neq \Phi(\xi)$ ):

$$\bar{\Pi} = \Pi \frac{l}{A \lambda T_i^2} = \int_0^1 \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{T}}{d\xi} \right)^2 - \bar{\Phi} \bar{T} \right]}_{\mathcal{F}} d\xi \quad (1530)$$

Daraus ergibt sich die Euler-Lagrange'sche Differentialgleichung nach (60) auf S. 37 zu:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{T}} - \frac{d}{d\xi} \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \bar{T}'} \right) = \frac{d^2 \bar{T}}{d\xi^2} + \bar{\Phi} = 0 \quad (1531)$$

Diese Beziehung entspricht der Differentialgleichung nach (1519). Für die Lösung nach der Methode von Ritz werden hier alternativ eine lineare Ansatzfunktion  $\tilde{T}_l(\xi)$  und eine quadratische  $\tilde{T}_q(\xi)$  angesetzt:

$$\tilde{T}_l(\xi) = a_0 + a_1 \xi \quad (1532)$$

$$\tilde{T}_q(\xi) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 \quad (1533)$$

⊙ **Aufträgen der wesentlichen Randbedingungen**

Die wesentliche Randbedingung  $\bar{T}(\xi = 0) = 1$  führt zu:

$$\tilde{T}_l(\xi) = 1 + a_1 \xi \quad (1534)$$

$$\tilde{T}_q(\xi) = 1 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 \quad (1535)$$

⊙ **Integration des Funktionals**

Das Funktional nach (1529) wird um den Term erweitert, der die natürlichen Randbedingungen erfaßt und schreibt sich dann mit  $dV = A dx$  als:

$$\Pi = \frac{1}{2} A \int_0^l \lambda \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dx - A \int_0^l T \Phi dx - \alpha \left( T_u - \frac{T}{2} \right) T A \quad (1536)$$

mit  $l/(A \lambda T_i^2)$  multipliziert ergibt sich:

$$\bar{\Pi} = \frac{l}{2 T_i^2} \int_0^l \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 dx - \frac{l}{\lambda T_i^2} \int_0^l T \Phi dx - \frac{l}{\lambda T_i^2} \alpha \left( T_u - \frac{T}{2} \right) T \quad (1537)$$

mit  $\bar{T} = T/T_i$ ,  $\xi = \frac{x}{l}$  und  $dx = l d\xi$  läßt sich schreiben:

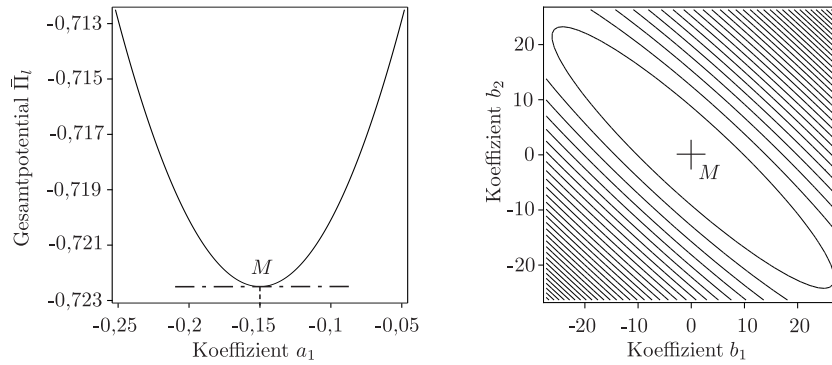
$$\begin{aligned} \bar{\Pi} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{d\bar{T}}{d\xi} \right)^2 d\xi - \underbrace{\frac{\Phi l^2}{\lambda T_i}}_{\bar{\Phi}} \int_0^1 \bar{T} d\xi - \underbrace{\frac{\alpha l}{\lambda}}_{\bar{\alpha}} \left( \bar{T}_u - \frac{1}{2} T(\xi = 1) \right) \bar{T}(\xi = 1) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{d\bar{T}}{d\xi} \right)^2 d\xi - \bar{\Phi} \int_0^1 \bar{T} d\xi - \bar{\alpha} \left( \bar{T}_u - \frac{1}{2} \bar{T}(\xi = 1) \right) \bar{T}(\xi = 1) \end{aligned} \quad (1538)$$

Einsetzen von  $\tilde{T}_l(x)$  und  $\tilde{T}_q(x)$  führt auf:

$$\bar{\Pi}_l = \frac{1}{2} (1 + \bar{\alpha}) a_1^2 + \left[ (1 - \bar{T}_u) \bar{\alpha} - \frac{\bar{\Phi}}{2} \right] a_1 + \left( \frac{1}{2} - \bar{T}_u \right) \bar{\alpha} - \bar{\Phi} \quad (1539)$$

$$\begin{aligned}\bar{\Pi}_q = & \frac{1}{2}(1 + \bar{\alpha}) b_1^2 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{4} \bar{\alpha}\right) b_2^2 + \left[(1 + \bar{\alpha}) b_2 + (1 - \bar{T}_u) \bar{\alpha} - \frac{\bar{\Phi}}{2}\right] b_1 \\ & + \left[(1 - \bar{T}_u) \bar{\alpha} - \frac{\bar{\Phi}}{3}\right] b_2 + \left(\frac{1}{2} - \bar{T}_u\right) \bar{\alpha} - \bar{\Phi}\end{aligned}\quad (1540)$$

In Bild A.80 ist das  $\bar{\Pi}$ -Potential der beiden Ansatzfunktionen dargestellt.



**Bild A.80.**  $\bar{\Pi}$ -Potential der linearen und quadratischen Ansatzfunktion ( $\bar{\alpha} = \bar{\Phi} = 1, \bar{T}_u = 1/5$ ). Die markierten Stellen (M) geben die stationären Werte der Funktionale wieder

Die Variation des Funktionals

$$\delta \bar{\Pi}_l = \frac{\partial \bar{\Pi}_l}{\partial a_1} \delta a_1 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \delta \bar{\Pi}_q = \frac{\partial \bar{\Pi}_q}{\partial b_1} \delta b_1 + \frac{\partial \bar{\Pi}_q}{\partial b_2} \delta b_2 = 0 \quad (1541)$$

führt auf die gesuchten Koeffizienten:

$$a_1 = \frac{(\bar{T}_u - 1) \bar{\alpha} + \frac{1}{2} \bar{\Phi}}{1 + \bar{\alpha}} \quad (1542)$$

$$b_1 = \frac{(\bar{T}_u + \frac{1}{2} \bar{\Phi} - 1) \bar{\alpha} + \bar{\Phi}}{1 + \bar{\alpha}} ; \quad b_2 = -\frac{1}{2} \bar{\Phi} \quad (1543)$$

Durch Einsetzen der Koeffizienten in die Ansatzfunktionen erhält man die gesuchten Temperaturverteilungen:

$$\bar{T}_l(\xi) = 1 - \frac{(1 - \bar{T}_u) \bar{\alpha} - \frac{1}{2} \bar{\Phi}}{1 + \bar{\alpha}} \xi \quad (1544)$$

$$\bar{T}_q(\xi) = 1 + \frac{(\bar{T}_u + \frac{1}{2} \bar{\Phi} - 1) \bar{\alpha} + \bar{\Phi}}{1 + \bar{\alpha}} \xi - \frac{\bar{\Phi}}{2} \xi^2 \quad (1545)$$

$$\underline{\bar{K}}_{w_1} = \underline{\bar{K}}_{w_2} = \bar{A} \left[ \begin{array}{c|c} 2 & -2 \\ \hline -2 & 2 \end{array} \right] \quad (1547)$$

Im Element 1 tritt keine Konvektion auf, so daß gilt:  $\underline{K}_{k1} = \underline{0}$ . Am Ende des Elementes 2 liegt Konvektion vor. Nach (957) erhält man:

$$\underline{\bar{K}}_{k2} = \bar{A} \left[ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & \bar{\alpha} \end{array} \right] \quad (1548)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

$$\underline{\bar{K}}_g = \bar{A} \left[ \begin{array}{c|c|c} 2 & -2 & 0 \\ \hline -2 & 4 & -2 \\ \hline 0 & -2 & 2 + \bar{\alpha} \end{array} \right] \quad (1549)$$

⊗ **Rechte Seite**

Der Vektor der Knotentemperaturen  $\vec{T}$  wird in  ${}^0\vec{T}$  (bekannte Knotentemperaturen) und  $\hat{\vec{T}}$  (unbekannte Knotentemperaturen) aufgeteilt:

$$\vec{T} = {}^0\vec{T} + \hat{\vec{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{bmatrix} \quad (1550)$$

Einsetzen in die Beziehung nach (960) führt auf:

$$\underline{\bar{K}}_g \left( {}^0\vec{T} + \hat{\vec{T}} \right) = \vec{F} \Rightarrow \underline{\bar{K}}_g \hat{\vec{T}} = \vec{F} - \underline{\bar{K}}_g {}^0\vec{T} \quad (1551)$$

Die Wärmequellendichte  $\bar{\Phi}$  und die Konvektion führen nach (960) auf die folgenden Vektoren  $\vec{F}_q$  und  $\vec{F}_Q$ :

$$\vec{F} = \vec{F}_q + \vec{F}_Q = \bar{A} \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \bar{\alpha} \bar{T}_u \end{array} \right] + \frac{\bar{\Phi} \bar{A}}{4} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right] = \frac{\bar{A}}{4} \left[ \begin{array}{c} \bar{\Phi} \\ 2 \bar{\Phi} \\ \bar{\Phi} + 4 \bar{\alpha} \bar{T}_u \end{array} \right] \quad (1552)$$

Infolge der bekannten Knotentemperatur  $\bar{T}_i = 1$  tritt aus (1551) ein weiterer Vektor auf der rechten Seite auf:

$$\bar{K}_g {}^0\vec{T} = \bar{A} \left[ \begin{array}{c|c|c} 2 & -2 & 0 \\ \hline -2 & 4 & -2 \\ \hline 0 & -2 & 2 + \bar{\alpha} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] = \frac{\bar{A}}{4} \left[ \begin{array}{c} 8 \\ -8 \\ 0 \end{array} \right] \quad (1553)$$

Damit ergibt sich die rechte Seite zu:

$$\vec{F}_g = \vec{F} - \bar{K}_g {}^0\vec{T} = \frac{\bar{A}}{4} \left[ \begin{array}{c} \bar{\Phi} - 8 \\ 2\bar{\Phi} + 8 \\ \bar{\Phi} + 4\bar{\alpha}\bar{T}_u \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} {}^R\bar{Q}_1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (1554)$$

### ⊗ Temperaturen

Durch Streichen der ersten Zeile und Spalte in (1549) und der ersten Komponente von (1554) erhält man folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Temperaturen:

$$\bar{A} \left[ \begin{array}{c|c} 4 & -2 \\ \hline -2 & 2 + \bar{\alpha} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{array} \right] = \frac{\bar{A}}{4} \left[ \begin{array}{c} 2\bar{\Phi} + 8 \\ \bar{\Phi} + 4\bar{\alpha}\bar{T}_u \end{array} \right] \quad (1555)$$

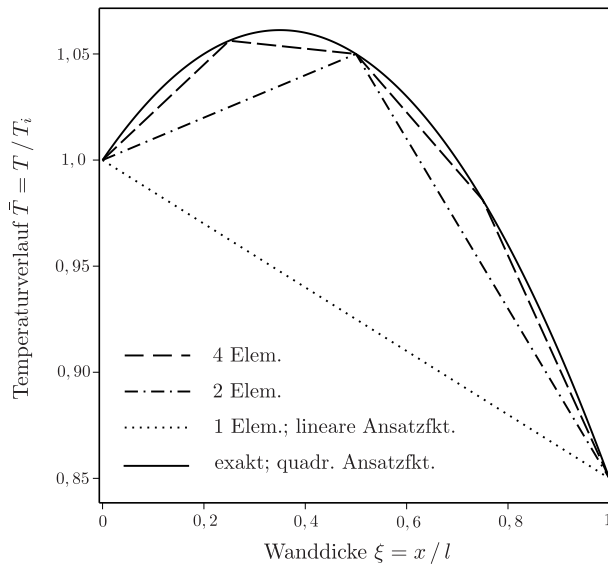
Es ergeben sich daraus folgende Temperaturen:

$$\left[ \begin{array}{c} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{array} \right] = \frac{1}{2(1 + \bar{\alpha})} \left[ \begin{array}{c} 2 + \bar{\alpha}(1 + \bar{T}_u) + \frac{1}{4}\bar{\Phi}(3 + \bar{\alpha}) \\ 2(1 + \bar{\alpha}\bar{T}_u) + \bar{\Phi} \end{array} \right] \quad (1556)$$

### ⊗ Vergleich der Lösungen für die Temperaturen

Bedingt durch die innere Wärmeproduktion  $\bar{\Phi}$  ist das Temperaturmaximum im Inneren der Wand zu finden. Die exakte Lösung aus der Differentialgleichung fällt mit der quadratischen Lösung nach Ritz zusammen (s. Bild A.82). Die Knotentemperaturen der FE-Lösungen mit 1, 2 und 4 Elementen sind exakt. Bedingt durch die lineare Temperaturverteilung im zweiknotigen Element weichen diese von der exakten Lösung ab. Bei einem Element tritt so ein Fehler von 11,9% auf. Bei zwei bzw. vier Elementen reduziert sich dieser Fehler auf 3,2% bzw. 0,8%.

Die Lösungen nach Ritz stimmen für eine lineare Ansatzfunktion mit der ei-



**Bild A.82.** Vergleich der Temperaturverläufe ( $\bar{\alpha} = \bar{\Phi} = 1$  und  $\bar{T}_u = 1/5$ ). Neben der exakten Lösung sind die Lösungen nach Ritz und die FE-Lösungen dargestellt

nes Elementes überein. Die quadratische Ansatzfunktion führt auf die exakte Lösung.

② **Wärmestrom an der Stelle  $\xi = 0$**

Der dimensionslose Wärmestrom an der Stelle  $\xi = 0$  ergibt sich aus der Beziehung  $\bar{K}_g \bar{T} = \bar{F}$ . Das Produkt der ersten Zeile von  $\bar{K}_g$  mit dem Lösungsvektor führt zu:

$$\bar{A} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2(1+\bar{\alpha})} \frac{2 + \bar{\alpha}(1 + \bar{T}_u) + \frac{1}{4}\bar{\Phi}(3 + \bar{\alpha})}{2(1+\bar{\alpha})} \\ \frac{2(1 + \bar{\alpha}\bar{T}_u) + \bar{\Phi}}{2(1+\bar{\alpha})} \end{bmatrix} - \frac{\bar{A}}{4} \bar{\Phi} = \bar{A} \frac{2(1 - \bar{T}_u)\bar{\alpha} - (2 + \bar{\alpha})\bar{\Phi}}{2(1 + \bar{\alpha})} = \bar{Q}_1 \quad (1557)$$

② **Wärmestromdichten aus der FEM**

Die Wärmestromdichte  $q$  läßt sich mit Hilfe der Fourie'schen Gleichung  $q = -\lambda dT/dx$  und den Formfunktionen schreiben als:

$$q = -\lambda \frac{d}{dx} \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) T_1 + \frac{x}{L} T_2 \right] = \frac{\lambda}{L} (T_1 - T_2) \quad (1558)$$

$L$  ist die Elementlänge und  $T_1, T_2$  sind die Knotentemperaturen. Die Wärmestromdichte  $q$  ist beim zweiknotigen Element konstant im Element. Sie läßt sich wie folgt dimensionslos schreiben:

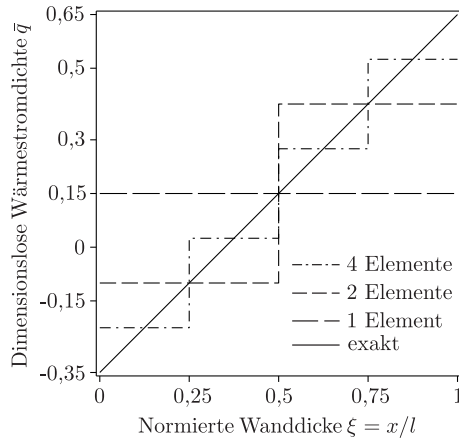
$$\bar{q} = \frac{ql}{\lambda T_i} = \frac{l}{L} (\bar{T}_1 - \bar{T}_2) \quad (1559)$$

Damit zeigt die Wärmestromdichte bei der FE-Lösung einen treppenförmigen Verlauf, wie er in Bild A.83 dargestellt ist.

Für die beiden Elemente ergeben sich folgende Wärmestromdichten:

$$\bar{q}_1 = \frac{4(1 - \bar{T}_u) \bar{\alpha} - (3 + \bar{\alpha}) \bar{\Phi}}{4(1 + \bar{\alpha})} \quad (1560)$$

$$\bar{q}_2 = \frac{4(1 - \bar{T}_u) \bar{\alpha} + (\bar{\alpha} - 1) \bar{\Phi}}{4(1 + \bar{\alpha})} \quad (1561)$$



**Bild A.83.** Vergleich der Wärmestromdichten der FE-Lösungen für 1, 2 und 4 Elemente mit der exakten Lösung ( $\bar{\alpha} = \bar{\Phi} = 1$ ;  $\bar{T}_u = 1/5$ )

⑤ **Vergleich der exakten Wärmestromdichten  $\bar{q}$  mit der aus der FEM**

Die dimensionslose Wärmestromdichte  $\bar{q}(\xi)$  läßt sich aus (1527) berechnen:

$$\bar{q}(\xi) = -\frac{d\bar{T}}{d\xi} \quad (1562)$$

Hierdurch erhält man die exakte Lösung der Wärmestromdichte zu:

$$\bar{q}(\xi) = \frac{(1 - \frac{1}{2} \bar{\Phi} - \bar{T}_u) \bar{\alpha} - \bar{\Phi}}{1 + \bar{\alpha}} + \bar{\Phi} \xi \quad (1563)$$



In Bild A.83 ist die dimensionslose Wärmestromdichte  $\bar{q} = q l / (\lambda T_i)$  über die Wanddicke angeführt. Die exakte Lösung zeigt nach (1563) einen linearen Verlauf. Dagegen ist die Wärmestromdichte bei der FE-Lösung nach (1559) treppenförmig.

### ➤ A.12.5 Wärmeübertragungsbeispiel V

391

#### ⊗ Lösung mit einem Element mit drei Knoten

Die Wärmeleitungs- und Konvektionsmatrix für dieses Element erhält man aus „Feldprobleme\_1d“ mit  $h = l$ ,  $m^2 = \alpha U / (A \lambda)$  zu:

$$\underline{K}_w = \frac{A \lambda}{30 h} \begin{bmatrix} 70 & -80 & 10 \\ -80 & 160 & -80 \\ 10 & -80 & 70 \end{bmatrix}; \quad \underline{K}_k = \frac{A \lambda}{30 h} \bar{m} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (1564)$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g = \underline{K}_w + \underline{K}_k$  ergibt sich mit  $\bar{m} = m^2 h^2$  zu:

$$\underline{K}_g = \frac{A \lambda}{30 h} \begin{bmatrix} 2(35 + 2 \bar{m}) & 2(\bar{m} - 40) & 10 - \bar{m} \\ 2(\bar{m} - 40) & 16(10 + \bar{m}) & 2(\bar{m} - 40) \\ 10 - \bar{m} & 2(\bar{m} - 40) & 2(35 + 2 \bar{m}) \end{bmatrix} \quad (1565)$$

Für die rechte Seite erhält man aus „Feldprobleme\_1d“ mit  $l = h$ :

$$\vec{F} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \beta_M h U + 6 \beta_i A_i \\ 4 \beta_M h U \\ \beta_M h U + 6 \beta_j A_j \end{bmatrix} = 5 \frac{A \lambda}{30 h} \bar{m} T_u \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1566)$$

Über die Stirnflächen  $A_i$  und  $A_j$  fließt keine Wärme, so daß sie aus (1566) herausfallen. Die Abkürzung  $\beta_M = \alpha_M T_u - q_M$  beschreibt die Konvektion über die Mantelfläche des Stabes ( $q_M = 0$ ).

Neben dem Vektor  $\vec{F}$  tritt auf der rechten Seite noch der Ausdruck  $-\underline{K}_g {}^0 \vec{T}$  mit  ${}^0 \vec{T}^T = \begin{bmatrix} T_f & 0 & 0 \end{bmatrix}$  auf.

$$\vec{F} - \underline{K}_g {}^0\vec{T} + {}^R\vec{Q} = \frac{A\lambda}{30h} \begin{bmatrix} \frac{5\bar{m}T_u - 2(35 + 2\bar{m})T_f}{20\bar{m}T_u + 2(40 - \bar{m})T_f} \\ \frac{5\bar{m}T_u + (\bar{m} - 10)T_f}{5\bar{m}T_u + (\bar{m} - 10)T_f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^RQ_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1567)$$

⊗ **Lösen des Gleichungssystems**

Das Einbringen der Randbedingungen führt dazu, daß die erste Zeile und Spalte aus  $\underline{K}_g$  und  $\vec{F} - \underline{K}_g {}^0\vec{T} + {}^R\vec{Q}$  verschwinden:

$$\frac{A\lambda}{30h} \left[ \begin{array}{c|c} 16(10 + \bar{m}) & 2(\bar{m} - 40) \\ \hline 2(\bar{m} - 40) & 2(35 + 2\bar{m}) \end{array} \right] \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \frac{A\lambda}{30h} \begin{bmatrix} 20\bar{m}T_u + 2(40 - \bar{m})T_f \\ 5\bar{m}T_u + (\bar{m} - 10)T_f \end{bmatrix} \quad (1568)$$

$$\begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{m}(180 + 7\bar{m})T_u + [480 + \bar{m}(28 - \bar{m})]T_f}{480 + 208\bar{m} + 6\bar{m}^2} \\ \frac{\bar{m}(120 + 2\bar{m})T_u + [240 + \bar{m}(-16 + \bar{m})]T_f}{480 + 208\bar{m} + 6\bar{m}^2} \end{bmatrix} \quad (1569)$$

⊗ **Temperaturverlauf im Element**

Über die Formfunktionen  $N_1, N_2, N_3$  des dreiknotigen Elementes läßt sich mit Hilfe der Knotentemperaturen  $T_f, T_2, T_3$  der Temperaturverlauf im Element darstellen:

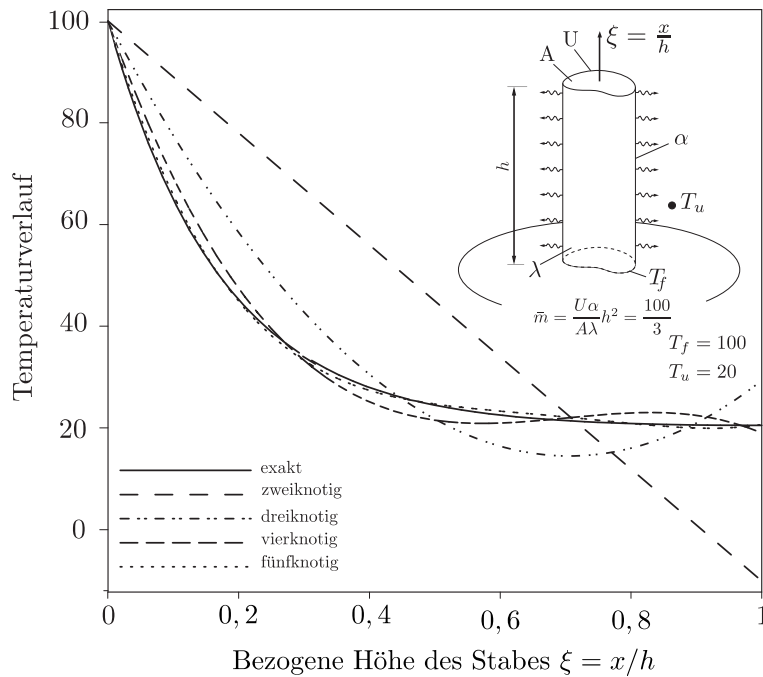
$$T(\xi) = N_1T_f + N_2T_2 + N_3T_3; \quad N_1 = 1 - 3\xi + 2\xi^2; \quad N_2 = 4\xi(1 - \xi); \quad N_3 = \xi(-1 + 2\xi) \quad (1570)$$

Daraus ergibt sich eine quadratische Verteilung der Temperatur über die Höhe der Kühlrippe:

$$T(\xi) = T_f - \left( \frac{240 + 12\bar{m}}{240 + 104\bar{m} + 3\bar{m}^2} \bar{m} - 10 \frac{12 + \bar{m}}{240 + 104\bar{m} + 3\bar{m}^2} \bar{m} \xi \right) (T_f - T_u) \xi \quad (1571)$$

Mit den Daten aus Bild A.84 erhält man:  $T_2 = 2150/99$  und  $T_3 = 1450/99$ . Es ergibt sich der Verlauf der Temperatur zu:

$$T(\xi) = 100 - \frac{8000}{33}\xi + \frac{17000}{99}\xi^2 \quad (1572)$$



**Bild A.84.** Vergleich der analytischen Lösung mit der FE-Lösung. Es wird ein Element mit unterschiedlicher Knotenanzahl verwendet

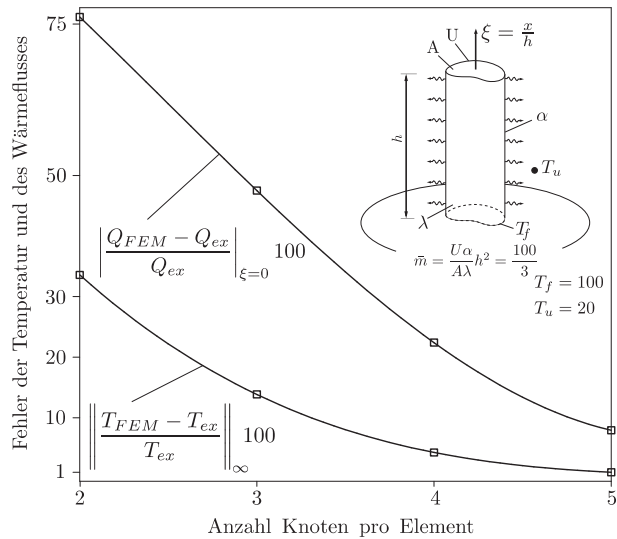
⊗ **Temperaturverläufe bei Elementen mit einer höheren Knotenanzahl**

Ausgehend von einem Element mit zwei Knoten wird die Knotenanzahl pro Element bis auf fünf Knoten gesteigert.

Der Temperaturverlauf im Element wird jetzt über Polynome erster (2 Knoten pro Element) bis vierter Ordnung (5 Knoten pro Element) beschrieben. Dementsprechend verläuft die Temperatur beim zweiknotigen Element linear über die Höhe der Kühlrippe. Beim dreiknotigen Element beschreibt eine Parabel den Temperaturverlauf. Der Temperaturverlauf beim fünfknotigen Element fällt fast mit der exakten Lösung zusammen.

⊗ **Fehlerbetrachtung beim Element mit größerer Knotenzahl**

In Bild A.85 ist der Fehler in Temperatur und Wärmefluß bei einem Element mit zwei bis fünf Knoten dargestellt.



**Bild A.85.** Fehlerdarstellung der Temperatur und des Wärmeflusses in Abhängigkeit von der Anzahl Knoten pro Element. Die Kühlrippe wird mit einem Element beschrieben

Der Temperaturfehler liegt beim fünfknotigen Element nur noch bei 1%. Demgegenüber weist der Fehler im Wärmefluß bei  $\xi = 0$  weit höhere Werte auf und hat beim fünfknotigen Element noch einen Wert von ca. 10%.

➤ **A.12.6 Wärmeübertragungsbeispiel VI**

407

⊗ **Elementknotenzuordnung**

Es wird die in Bild 12.15 auf der S. 408 dargestellte Einteilung in Dreieckselemente verwendet.

In der Tab. A.15 sind neben der Elementknotenzuordnung die wichtigsten Größen der Steifigkeitsmatrizen aufgeführt.

**Tabelle A.15.** Elementknotenzuordnung

Element	Knoten			$x_{21}$	$x_{13}$	$x_{32}$	$y_{21}$	$y_{13}$	$y_{32}$
1	1	3	4	1	-1	0	0	-1	1
2	1	4	2	1	0	-1	1	-1	0
3	3	5	6	1	-1	0	0	-1	1
4	3	6	4	1	0	-1	1	-1	0

⊗ **Elementsteifigkeitsmatrizen**

Die Steifigkeitsmatrizen der Elemente 1 und 3 sowie 2 und 4 sind identisch, da sie sowohl in der Größe als auch in der Orientierung übereinstimmen.

Da laut Aufgabenstellung keine Konvektion zu berücksichtigen ist, treten die Steifigkeitsmatrizen infolge Konvektion (s. (995) auf der S. 398) nicht auf. Übrig bleiben damit die Steifigkeitsmatrizen infolge Wärmeleitung (s. (985) auf der S. 396).

$$\underline{K}_{w_1} = \underline{K}_{w_3} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c} T_{[1][3]} & T_{[3][5]} & T_{[4][6]} \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \end{array} \end{bmatrix} \begin{array}{l} T_{[1][3]} \\ T_{[3][5]} \\ T_{[4][6]} \end{array} \quad (1573)$$

$$\underline{K}_{w_2} = \underline{K}_{w_4} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} \begin{array}{c|c|c} T_{\langle 1 \rangle (3)} & T_{\langle 4 \rangle (6)} & T_{\langle 2 \rangle (4)} \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & 2 \end{array} \end{bmatrix} \begin{array}{l} T_{\langle 1 \rangle (3)} \\ T_{\langle 4 \rangle (6)} \\ T_{\langle 2 \rangle (4)} \end{array} \quad (1574)$$

Die Zeilen und Spalten sind mit den Freiheitsgraden  $T_i$  der Knoten durchnummeriert. Die Klammersymbole ordnen die Zeilen und Spalten den Elementen zu: Element 1:  $[ \cdots ]$ ; Element 2:  $\langle \cdots \rangle$ ; Element 3:  $[ \cdots ]$ ; Element 4:  $( \cdots )$ .

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich aus der Überlagerung der Einzelsteifigkeitsmatrizen. Die Temperaturen auf den Wandoberflächen sind bekannt ( $T_1=T_2=T_5=T_6=0$ ). Unbekannt sind die Temperaturen in den Knoten 3 und 4. Daher wird nicht die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  aufgestellt, sondern direkt die Untermatrix  $\hat{\underline{K}}_g$ , die sich durch die Streichung der ersten und letzten beiden Zeilen und Spalten der Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt. In diese Untermatrix gehen Anteile aller vier Steifigkeitsmatrizen ein. Betrachtet man Knoten 3, so erkennt man aus Bild 12.15 auf der S. 408, daß an ihn die Elemente 1, 3, 4 angrenzen. Folglich erhält die Zeile  $T_3$ , Spalte  $T_3$  Anteile der Steifigkeitsmatrizen 1, 3 und 4. Aus Steifigkeitsmatrix 1 den Anteil  $[2]$  aus der zweiten Zeile und Spalte der Matrix  $\underline{K}_{[1]}$ . Aus der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{[3]}$  den Wert  $[1]$  aus der ersten Zeile und Spalte. Aus der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_{(4)}$  den Wert  $(1)$  aus der ersten Zeile und Spalte dieser Matrix.

$$\hat{\underline{K}}_g = \frac{t}{2} \left[ \begin{array}{c|c} T_3 & T_4 \\ \hline [2] + [1] + (1) & [-1] + (-1) \\ \hline [-1] + (-1) & [1] + \langle 1 \rangle + (2) \end{array} \right] \begin{array}{l} T_3 \\ T_4 \end{array} \quad (1575)$$

Analog können die anderen Elemente der Untermatrix gebildet werden.

⊗ **Rechte Seite (Innere Wärmequellen)**

Die rechte Seite ergibt sich aus der inneren Wärmequelle, die über die Wärmequellendichte  $\Phi=100$  beschrieben wird. Einsetzen von  $\Phi$  in (1007) auf der S. 402 ergibt:

$$\vec{F}_Q = \Phi \frac{A_\Delta}{3} t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{100}{6} t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \frac{50}{3} \\ \frac{50}{3} \\ \frac{50}{3} \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \bar{Q}_1 \\ \bar{Q}_2 \\ \bar{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (1576)$$

Diese Beziehung ist für alle Elemente gleich, da sie sich in  $\Phi$  und  $A_\Delta$  nicht unterscheiden. Für die Knoten 3 und 4 ergibt sich der Wärmefluß durch Überlagerung der Anteile aus den einzelnen Elementen. Knoten 3 erhält Anteile von den Elementen 1, 3 und 4. Knoten 4 von den Elementen 1, 2 und 4:

$$\begin{aligned} Q_3 &= t \left( {}^1\bar{Q}_3 + {}^3\bar{Q}_3 + {}^4\bar{Q}_3 \right) = 50 t \\ Q_4 &= t \left( {}^1\bar{Q}_4 + {}^2\bar{Q}_4 + {}^4\bar{Q}_4 \right) = 50 t \end{aligned} \quad (1577)$$

⊗ **Temperaturen**

Die Temperaturen können jetzt mit Hilfe der Untermatrix sowie der berechneten rechten Seite ermittelt werden:

$$\frac{t}{2} \left[ \begin{array}{c|c} 4 & -2 \\ \hline -2 & 4 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} T_3 \\ T_4 \end{array} \right] = t \left[ \begin{array}{c} 50 \\ 50 \end{array} \right] \quad (1578)$$

Daraus ergeben sich die Temperaturen:  $T_3 = T_4 = 50$

⊗ **Exakte Lösung des Problems**

Nach (939) auf der S. 377 ergibt sich für den eindimensionalen Fall:

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + \Phi = 0 \quad (1579)$$

Durch zweimaliges Integrieren kommt man zu folgender Gleichung:

$$T = -\frac{\Phi}{\lambda} \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 \quad (1580)$$

Die Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  werden durch die Randbedingungen:

$$T(x=0) = T_a; \quad T(x=l) = T_b \quad (1581)$$

bestimmt. Sie beschreiben die Oberflächentemperaturen der Wand. Das führt zu:

$$\begin{aligned} T(x=0) &= T_a = C_2 \\ T(x=l) &= T_b = -\frac{\Phi}{\lambda} \frac{l^2}{2} + C_1 l + T_a \Rightarrow C_1 = \frac{T_b - T_a}{l} + \frac{\Phi}{\lambda} \frac{l}{2} \end{aligned} \quad (1582)$$

Damit ergibt sich die geschlossene Lösung des Problems:

$$T(x) = \frac{\Phi}{2\lambda} x(l-x) + T_a \left(1 - \frac{x}{l}\right) + T_b \frac{x}{l} \quad (1583)$$

Mit den Oberflächen  $T_a = T_b = 0$ ,  $\Phi = 100$ ,  $\lambda = 1$  und  $l = 2$  erhält man:

$$T(x) = \frac{\Phi}{2\lambda} x (l - x) = 50 x (2 - x) \quad (1584)$$

Die exakte Temperaturverteilung über die Wand hat die Form einer Parabel. Diese ist in Bild A.86 dargestellt.

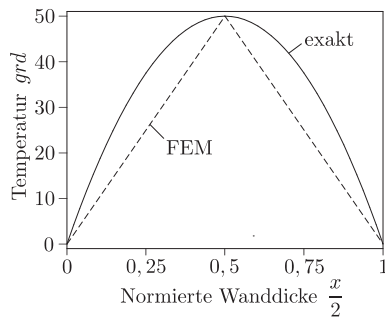
### ⊗ Vergleich der Lösungen

Die Temperaturverteilung über die Dicke der Wand lässt sich mit Hilfe der Formfunktionen berechnen. Nach (979) auf der S. 394 ergibt sich:

$$T = \left[ L_1 \mid L_2 \mid L_3 \right] \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \quad (1585)$$

Betrachtet man nun die Kante zwischen den Knoten 1 und 3 des Elementes 1, so hat diese die Dreiecksordinate  $L_3 = 0$ . Die Dreiecksordinate  $L_2$  lässt sich als  $L_2 = x/x_2$  schreiben (s. (77) auf der S. 40). Damit ergibt sich die Temperaturverteilung auf dieser Kante zu ( $T_1 = 0$ ):

$$T = L_1 T_1 + L_2 T_2 = L_2 T_2 = T_2 \frac{x}{x_2} = T_2 x = 50 x \quad (1586)$$



**Bild A.86.** Vergleich der Temperaturverteilungen

Daraus ergibt sich eine Linearverteilung der Temperatur über die Dicke der Wand.

$$T(x) = \begin{cases} 50 x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 100 - 50 x & \text{für } 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \quad (1587)$$



Diese und die quadratische Verteilung der exakten Lösung sind in Bild A.86 dargestellt.

In der folgenden Tabelle sind an einigen Punkten in der Wand die Temperaturen der analytischen Lösung und der FE-Lösung gegenübergestellt.

**Tabelle A.16.** Exakte Temperaturen und die der FE-Lösung

$\frac{x}{l}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$T_{\text{exakt}}$	0	37,5	50	37,5	0
$T_{\text{FEM}}$	0	25	50	25	0

Es tritt an der Stelle  $x/l = 1/4$  und  $x/l = 3/4$  der maximale Fehler von  $(37,5 - 25)/37,5 \cdot 100 = 33,3\%$  auf.

### ➤ A.12.7 Wärmeübertragungsbeispiel VII

408

#### ➤ Elementknotenzuordnung

Die Elementknotenzuordnung sowie die wichtigsten Größen der Steifigkeitsmatrizen sind in der Tab. A.17 zusammengefaßt:

**Tabelle A.17.** Elementknotenzuordnung

Element	Knoten			$x_{21}$	$x_{31}$	$x_{32}$	$y_{21}$	$y_{31}$	$y_{32}$
1	1	2	3	0	$-l$	$-l$	$l$	$l$	0
2	3	4	1	0	$l$	$l$	$-l$	$-l$	0

#### ➤ Steifigkeitsmatrizen

Die Steifigkeitsmatrix<sup>1</sup> setzt sich aus zwei Matrizen  $\underline{K}_w$  und  $\underline{K}_k$  zusammen. Die Matrix  $\underline{K}_w$  berücksichtigt die Wärmeleitung, während  $\underline{K}_k$  infolge Konvektion auftritt (s. (985) auf der S. 396 und (995) auf der S. 398).

<sup>1</sup>Der Begriff der Steifigkeitsmatrix ist historisch begründet und wird hier analog zu den Problemen aus der Statik übernommen, obwohl die Elemente der Matrizen bei der Wärmeleitung nicht die Dimension einer Steifigkeit haben.

$$\underline{K}_{w_1} = 3\lambda \frac{t}{6} \begin{array}{c|c|c} T_1 & T_2 & T_3 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \quad (1588)$$

$t$  ist die zahlenmäßig nicht bekannte Dicke. Die Konvektion bei dem Element 1 auf der Kante zwischen Knoten 2 und 3 führt zu folgender Matrix:

$$\underline{K}_{k_1} = \frac{\alpha t l}{6} \begin{array}{c|c|c} T_1 & T_2 & T_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array} \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \quad (1589)$$

Die Gesamtmatrix ergibt sich aus:  $\underline{K}_1 = \underline{K}_{w_1} + \underline{K}_{k_1}$

$$\underline{K}_1 = \frac{t}{6} \begin{array}{c|c|c} T_1 & T_2 & T_3 \\ \hline 3\lambda & -3\lambda & 0 \\ \hline -3\lambda & 6\lambda + 2\alpha l & -3\lambda + \alpha l \\ \hline 0 & -3\lambda + \alpha l & 3\lambda + 2\alpha l \end{array} \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \quad (1590)$$

Das Element 2 weist keine Kante auf, über die durch Konvektion Wärme übertragen wird, so daß gilt:  $\underline{K}_2 = \underline{K}_{w_2}$ :

$$\underline{K}_2 = \frac{t\lambda}{2} \begin{array}{c|c|c} T_3 & T_4 & T_1 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \end{array} \begin{array}{l} T_3 \\ T_4 \\ T_1 \end{array} \quad (1591)$$

⊗ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  ergibt sich durch Überlagerung der Einzelsteifigkeitsmatrizen:

$$\underline{K}_g = \frac{t}{6} \begin{array}{c|c|c|c} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ \hline 6\lambda & -3\lambda & 0 & -3\lambda \\ \hline -3\lambda & 6\lambda + 2\alpha l & -3\lambda + \alpha l & 0 \\ \hline 0 & -3\lambda + \alpha l & 6\lambda + 2\alpha l & -3\lambda \\ \hline -3\lambda & 0 & -3\lambda & 6\lambda \end{array} \begin{array}{l} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{array} \quad (1592)$$

⊗ **Rechte Seite**

Die Wärmequellen werden als punktförmig angenommen, wobei sie an der Stelle der Knoten wirken. Es gilt damit nach (1007) auf der S. 402:

$$\vec{F} = \bar{Q} t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1593)$$

Aus der Konvektion entsteht für Element 1 nach (1007) auf der S. 402 folgender Vektor:

$${}^1\vec{F}_R = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_{23} S_{23} T_u}{\alpha_{23} S_{23} T_u} \\ \frac{\alpha_{23} S_{23} T_u}{\alpha_{23} S_{23} T_u} \end{bmatrix} = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha l T_u}{\alpha l T_u} \\ \frac{\alpha l T_u}{\alpha l T_u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (1594)$$

Damit ergibt sich die rechte Seite zu:

$$\vec{Q} = t \bar{Q} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\alpha l T_u}{\alpha l T_u} \\ \frac{\alpha l T_u}{\alpha l T_u} \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \frac{\bar{Q} + \frac{\alpha}{2} l T_u}{\bar{Q} + \frac{\alpha}{2} l T_u} \\ \frac{\bar{Q} + \frac{\alpha}{2} l T_u}{\bar{Q} + \frac{\alpha}{2} l T_u} \\ \bar{Q} \end{bmatrix} \quad (1595)$$

⊗ **Temperaturen**

Die Bestimmung der Knotentemperaturen führt zu folgendem, linearen Gleichungssystem:

$$\frac{t}{6} \begin{bmatrix} 6\lambda & -3\lambda & 0 & -3\lambda \\ -3\lambda & 6\lambda + 2\alpha l & -3\lambda + \alpha l & 0 \\ 0 & -3\lambda + \alpha l & 6\lambda + 2\alpha l & -3\lambda \\ -3\lambda & 0 & -3\lambda & 6\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} + \frac{\alpha}{2} l T_u \\ \bar{Q} + \frac{\alpha}{2} l T_u \\ \bar{Q} \end{bmatrix} \quad (1596)$$

Die Koeffizientenmatrix aus der voranstehenden Gleichung ist bedingt durch das Auftreten der Konvektion nicht singulär. Es muß also keine Knotentemperatur vorgegeben werden. Es ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha \lambda l} \begin{bmatrix} \alpha \lambda l T_u + (2\alpha l + 4\lambda) \bar{Q} \\ \alpha \lambda l T_u + 4\lambda \bar{Q} \\ \alpha \lambda l T_u + 4\lambda \bar{Q} \\ \alpha \lambda l T_u + (2\alpha l + 4\lambda) \bar{Q} \end{bmatrix} \quad (1597)$$

⊗ **A.12.8 Wärmeübergangsbeispiel VIII**

408

⊗ **Einführung dimensionsloser Größen**

Nach (1022) auf der S. 409 ergibt sich die Temperatur in dimensionsloser Form in Abhängigkeit von den Einflußgrößen  $\bar{t}$ ,  $\bar{\alpha}$  und  $g$  zu:

$$\frac{T}{T_1} = \frac{T}{T_1} \left( \bar{t}, \frac{\alpha l}{\lambda}, \frac{T_1 - T_u}{T_1} \right) = \bar{T}(\bar{t}, \bar{\alpha}, g) \quad (1598)$$

Aus  $g = (T_1 - T_u)/T_1$  ergibt sich:  $\bar{T}_u = T_u/T_1 = 1 - g$

Die Anzahl der Einflußgrößen wird somit von sechs auf drei reduziert. Die Bezugsgrößen  $l, \lambda$  und  $T_1$  gehen in die Rechnung mit „1“ ein.

⊗ **Elementknotenzuordnung**

Das Problem ist doppelt symmetrisch, so daß nur ein Viertel des Bleches in die Rechnung eingeht.

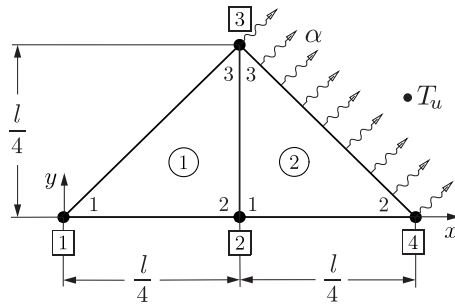


Bild A.87. Einteilung eines Viertels des Dreiecks in zwei Elemente. Es wird die doppelte Symmetrie ausgenutzt

Die Elementknotenzuordnung sowie die wichtigsten Größen der Steifigkeitsmatrizen sind in der Tabelle A.18 zusammengefaßt ( $\bar{x}_{ij} = x_{ij}/l$ ;  $\bar{y}_{ij} = y_{ij}/l$ ):

Tabelle A.18. Elementknotenzuordnung und Elementdaten

Element	Knoten			$\bar{x}_{21}$	$\bar{x}_{31}$	$\bar{x}_{32}$	$\bar{y}_{21}$	$\bar{y}_{31}$	$\bar{y}_{32}$
1	1	2	3	1/4	1/4	0	0	1/4	1/4
2	2	4	3	1/4	0	-1/4	0	1/4	1/4

### ② Steifigkeitsmatrizen

Das Element 1 weist keine Kante auf, über die per Konvektion Wärme übertragen wird, so daß gilt:  $\underline{K}_1 = \underline{K}_{w_1}$ . Nach (985) auf der S. 396 ergibt sich:

$$\underline{K}_1 = \frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 & \bar{T}_2 & \bar{T}_3 \\ \hline 12 & -12 & 0 \\ -12 & 24 & -12 \\ \hline 0 & -12 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \end{bmatrix} \quad (1599)$$

Die Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}_2$  setzt sich aus den beiden Matrizen  $\underline{K}_{w_2}$  und  $\underline{K}_{k_2}$  zusammen. Die Matrix  $\underline{K}_{w_2}$  berücksichtigt die Wärmeleitung, während  $\underline{K}_{k_2}$  infolge Konvektion auftritt:

$$\underline{K}_{w_2} = \frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 & \bar{T}_4 & \bar{T}_3 \\ \hline 24 & -12 & -12 \\ -12 & 12 & 0 \\ \hline -12 & 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_4 \\ \bar{T}_3 \end{bmatrix} \quad (1600)$$

Die Konvektion bei dem Element 2 auf der Kante zwischen Knoten 3 und 4 führt nach (995) auf der S. 398 zu folgender Matrix:

$$\underline{K}_{k_2} = \frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 & \bar{T}_4 & \bar{T}_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\bar{\alpha} & \sqrt{2}\bar{\alpha} \\ \hline 0 & \sqrt{2}\bar{\alpha} & 2\sqrt{2}\bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_4 \\ \bar{T}_3 \end{bmatrix} \quad (1601)$$

Die Gesamtmatrix ergibt sich aus:  $\underline{K}_2 = \underline{K}_{w_2} + \underline{K}_{k_2}$

$$\underline{K}_2 = \frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 & \bar{T}_4 & \bar{T}_3 \\ \hline 24 & -12 & -12 \\ -12 & 12 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} & \sqrt{2}\bar{\alpha} \\ \hline -12 & \sqrt{2}\bar{\alpha} & 12 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_4 \\ \bar{T}_3 \end{bmatrix} \quad (1602)$$

⑤ **Gesamtsteifigkeitsmatrix**

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix  $\underline{K}_g$  gewinnt man durch Überlagerung der Einzelsteifigkeitsmatrizen:

$$\underline{K}_g = \frac{\bar{t}}{24} \begin{array}{c|c|c|c} \bar{T}_1 & \bar{T}_2 & \bar{T}_3 & \bar{T}_4 \\ \hline 12 & -12 & 0 & 0 \\ \hline -12 & 48 & -24 & -12 \\ \hline 0 & -24 & 24 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} & \sqrt{2}\bar{\alpha} \\ \hline 0 & -12 & \sqrt{2}\bar{\alpha} & 12 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} \end{array} \begin{array}{l} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{array} \quad (1603)$$

⊗ **Rechte Seite des Problems**

Es gilt nach (1007) auf der S. 402 für die rechte Seite:

$$\vec{Q} = \vec{F}_R + \vec{F}_Q + \vec{F} \quad (1604)$$

Da keine punktförmigen, inneren Wärmequellen ( $\vec{F}$ ) und keine verteilten inneren Wärmequellen ( $\vec{F}_Q$ ) existieren, bleibt nur der Anteil des Wärmeüberganges auf den Rändern des Elementes ( $\vec{F}_R$ ). Aus der Konvektion entsteht für Element 2 folgender Vektor:

$${}^2\vec{F}_R = \frac{\bar{t}}{8} \sqrt{2} (1-g) \bar{\alpha} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1605)$$

Damit ergibt sich die rechte Seite zu:

$$\vec{Q} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 {}^R\bar{Q}_1 \\ 0 \\ \bar{t} \sqrt{2} (1-g) \bar{\alpha} \\ \bar{t} \sqrt{2} (1-g) \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad (1606)$$

⊗ **Temperaturen**

Die Knotentemperaturen lassen sich in bekannte  ${}^0\vec{T}$  und unbekannte Temperaturen  $\vec{\hat{T}}$  aufteilen:

$$\vec{T} = \vec{\hat{T}} + {}^0\vec{T} = \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1607)$$

aus  $\underline{K}_g(\vec{\hat{T}} + {}^0\vec{T}) = \vec{Q}$  ergeben sich die beiden Seiten zu:

$$\underline{K}_g \vec{\hat{T}} = \vec{Q} - \underline{K}_g {}^0\vec{T} \quad (1608)$$

Durch Einsetzen von

$$\underline{K}_g \vec{\hat{T}} = \frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 48 & -24 & -12 \\ 0 & -24 & (12 + \sqrt{2}\bar{\alpha})2 & \sqrt{2}\bar{\alpha} \\ 0 & -12 & \sqrt{2}\bar{\alpha} & 12 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} \quad (1609)$$

und

$$\underline{K}_g {}^0\vec{T} = \frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 48 & -24 & -12 \\ 0 & -24 & (12 + \sqrt{2}\bar{\alpha})2 & \sqrt{2}\bar{\alpha} \\ 0 & -12 & \sqrt{2}\bar{\alpha} & 12 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} 12 \\ -12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1610)$$

erhält man durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte auf der linken Seite und des ersten Elementes auf der rechten Seite:

$$\frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} 48 & -24 & -12 \\ -24 & (12 + \sqrt{2}\bar{\alpha})2 & \sqrt{2}\bar{\alpha} \\ -12 & \sqrt{2}\bar{\alpha} & 12 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \frac{\bar{t}}{8} \begin{bmatrix} 4 \\ \sqrt{2}(1-g)\bar{\alpha} \\ \sqrt{2}(1-g)\bar{\alpha} \end{bmatrix}$$



(1611)

⊗ **Temperaturen**

Es ergibt sich mit  $\psi = 12 + (9\sqrt{2} + \bar{\alpha})\bar{\alpha}$  die Gesamtlösung zu:

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\psi} \begin{bmatrix} 12 + 3\sqrt{2}(3 - 2g)\bar{\alpha} + (1 - \frac{3}{4}g)\bar{\alpha}^2 \\ 12 + 3\sqrt{2}(3 - \frac{5}{2}g)\bar{\alpha} + (1 - g)\bar{\alpha}^2 \\ 12 + 9\sqrt{2}(1 - g)\bar{\alpha} + (1 - g)\bar{\alpha}^2 \end{bmatrix} \quad (1612)$$

⊗ **Wärmefluß**

Der Wärmefluß, der über die Außenkante per Konvektion an die Umgebung abgegeben wird, kann über die Beziehung  $\underline{K}_g \vec{T} = \vec{Q}$  berechnet werden. An dem Knoten 1, dem die Temperatur  $\bar{T}_1$  aufgeprägt wurde, tritt als Reaktionsgröße der Wärmefluß  ${}^R\bar{Q}_1$  auf. Das ist die Wärmemenge pro Zeiteinheit, die in den Körper fließt. Der Wärmefluß ist hier mit  ${}^R\bar{Q}_1 = {}^RQ_1/(l\lambda T_1)$  dimensionslos, da zuvor die Einflußgrößen normiert wurden:

$$\frac{\bar{t}}{24} \begin{bmatrix} 12 & -12 & 0 & 0 \\ -12 & 48 & -24 & -12 \\ 0 & -24 & (12 + \sqrt{2}\bar{\alpha})2 & \sqrt{2}\bar{\alpha} \\ 0 & -12 & \sqrt{2}\bar{\alpha} & 12 + 2\sqrt{2}\bar{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{T}_1 \\ \bar{T}_2 \\ \bar{T}_3 \\ \bar{T}_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 {}^R\bar{Q}_1 \\ 0 \\ \bar{t}\sqrt{2}(1 - g)\bar{\alpha} \\ \bar{t}\sqrt{2}(1 - g)\bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad (1613)$$

Es ergibt sich der Wärmefluß für den Knoten 1 zu:

$${}^R\bar{Q}_1 = \frac{3g\bar{t}}{8} \frac{(8\sqrt{2} + \bar{\alpha})\bar{\alpha}}{12 + (9\sqrt{2} + \bar{\alpha})\bar{\alpha}}; \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha l}{\lambda}; \quad g = \frac{T_1 - T_u}{T_1}; \quad \bar{t} = \frac{t}{l} \quad (1614)$$

${}^R\bar{Q}_1$  ist die dimensionslose Wärmemenge, die pro Zeiteinheit in den Körper fließt.

⊗ **A.12.9 Wärmeübertragungsbeispiel IX**

In Bild A.88 ist ein Ausschnitt aus einer Fußbodenheizung dargestellt, die in Tiefenrichtung unendlich ausgedehnt sein soll. Unter Ausnutzung der zyklischen Symmetrie sollen Temperaturverteilungen und Wärmestromdichten bestimmt werden.

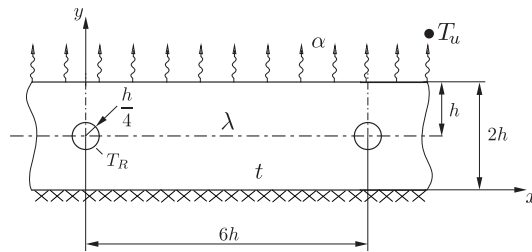


Bild A.88. Ausschnitt aus einer Fußbodenheizung

### ⊗ Dimensionslose FEM-Lösung

Die Temperatur  $T$  hängt von folgenden Einflussgrößen ab:

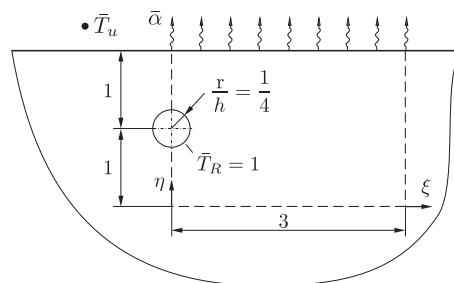
$$T = T(h, t, \alpha, \lambda, T_R, T_R - T_u) \quad (1615)$$

Die abhängige Größe  $T$  und die Einflussgrößen werden auf  $h$ ,  $\lambda$  und  $T_R$  bezogen und damit dimensionslos gemacht:

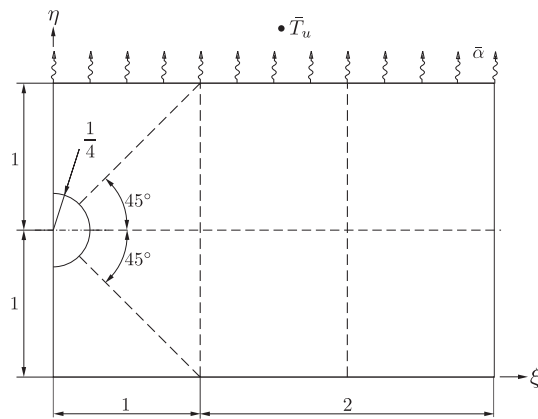
$$\bar{T} = \frac{T}{T_R} = \bar{T}\left(\frac{t}{h}, \frac{\alpha h}{\lambda}, \frac{T_R - T_u}{T_R}\right) = \bar{T}(\bar{t}, \bar{\alpha}, g) \quad (1616)$$

Es reduziert sich die Anzahl der Einflussgrößen um die drei Bezugsgrößen. In der FE-Rechnung werden die Bezugsgrößen  $h$ ,  $\lambda$  und  $T_R$  zu „1“ gesetzt.

### ⊗ Das FE-Netz

Bild A.89. Segment aus der Fußbodenheizung mit den natürlichen Koordinaten  $\xi = x/h$  und  $\eta = y/h$ , sowie den dimensionslosen Größen des Problems

In Bild A.89 ist ein Segment aus der Fußbodenheizung dargestellt, das infolge der zyklischen Symmetrie betrachtet werden kann. Bei Ausnutzung der Symmetrie muß die Bedingung erfüllt sein, daß über die Schnittkanten keine Wärme fließt, d.h. es muß der Temperaturgradient  $dT/dn$  verschwinden. Das Segment wird in sechs Teilflächen zerlegt (s. Bild A.90) und jede Teilfläche vernetzt. In der symbolischen FE-Rechnung werden die auf  $h$  bezogenen Abmaße, sowie die dimensionslosen Größen  $\bar{\alpha}$  und  $T_u/T_R = \bar{T}_u = 1 - (T_R - T_u)/T_R = 1 - g$  eingesetzt.



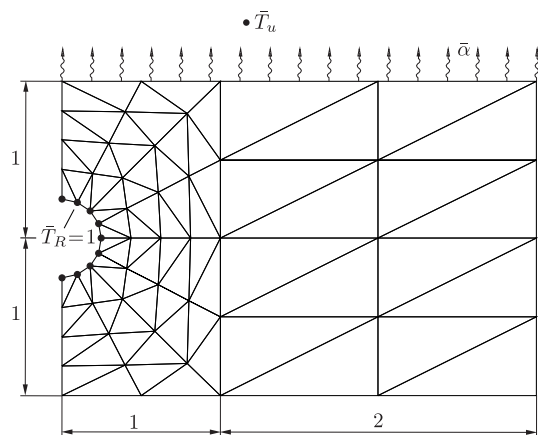
**Bild A.90.** Segment mit sechs Teilflächen. Die Bemaßung bezieht sich auf die dimensionslosen Abmaße

In Bild A.91 ist das erstellte Netz mit den Randbedingungen angeführt. Auf dem Halbrohr ist den Knoten als wesentliche Randbedingung die Temperatur  $\bar{T}_R = 1$  aufgeprägt. Die dimensionslose Wärmeübergangszahl  $\bar{\alpha} = \alpha h / \lambda$  ist als natürliche Randbedingung den äußeren Kanten der Elemente aufgeprägt, die auf der Kante  $\eta = 2$  liegen.

② **Knotentemperaturen**

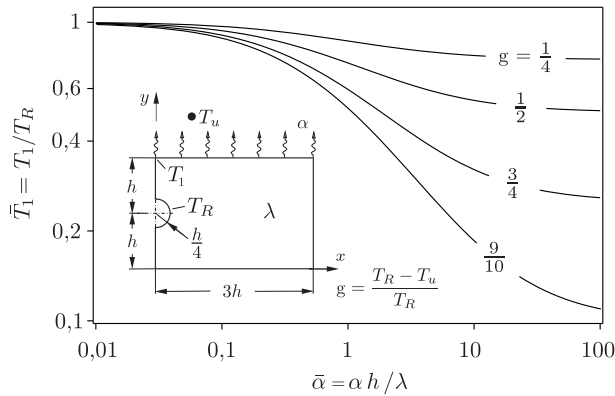
Stellvertretend für alle Knotentemperaturen sei die Temperatur des Knotens an der Stelle  $x = 0, y = 2h$  angeführt:

$$\bar{T}_1 = 1 - \frac{0,064 \bar{\alpha}^5 + 1,21 \bar{\alpha}^4 + 15,44 \bar{\alpha}^2 + 7,25 \bar{\alpha}^3 + 8,59 \bar{\alpha}}{0,064 \bar{\alpha}^5 + 1,28 \bar{\alpha}^4 + 22,60 \bar{\alpha}^2 + 22,24 \bar{\alpha} + 8,52 \bar{\alpha}^3 + 5,62} g \quad (1617)$$



**Bild A.91.** Das FE-Netz des Segmentes

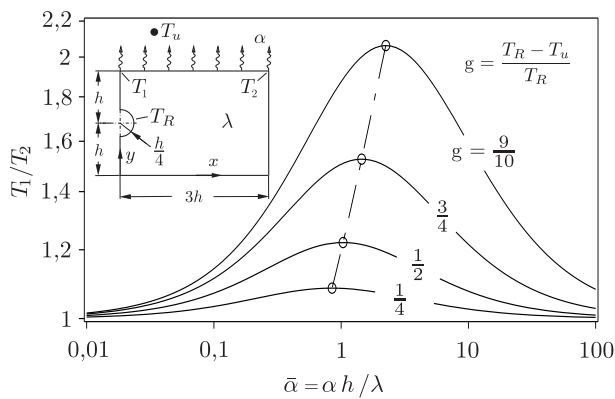
In Bild A.92 ist der Verlauf der Temperatur  $\bar{T}_1$  in Abhängigkeit von  $\bar{\alpha}$  und dem Parameter  $g$  dargestellt.



**Bild A.92.** Temperatur  $\bar{T}_1$  an der Stelle  $x = 0$ ,  $y = 2h$

### ⊗ Verhältnis der Temperaturen

In Bild A.93 ist das Verhältnis der Temperaturen  $T_1(x = 0, y = 2h)/T_2(x = 3h, y = 2h)$  als Funktion des dimensionslosen Wärmeübergangskoeffizienten  $\bar{\alpha} = \alpha h/\lambda$  und der Größe  $g = (T_R - T_u)/T_R$  als Parameter aufgetragen. Es ergibt sich jeweils ein ungünstigstes  $\bar{\alpha}$ , bei dem das größte Verhältnis  $T_1/T_2$  und damit die ungünstigste Temperaturverteilung auftritt. Diese Verteilung verschiebt sich, wenn ein anderes  $\bar{\alpha}$  oder andere Verhältnisse  $g$  auftreten.



**Bild A.93.** Verhältnis der Temperaturen als Funktion des dimensionslosen Wärmeübergangskoeffizienten  $\bar{\alpha} = \alpha h/\lambda$

### ⊗ Mittlere Wärmestromdichte

Den gesamten Wärmefluß  $\bar{Q}_g$  erhält man als Summe der Wärmeflüsse an den Knoten des Rohres. Für den dimensionslosen Wärmefluß  $\bar{Q}$  und Wärme-

stromdichte  $\bar{q}$  gilt:

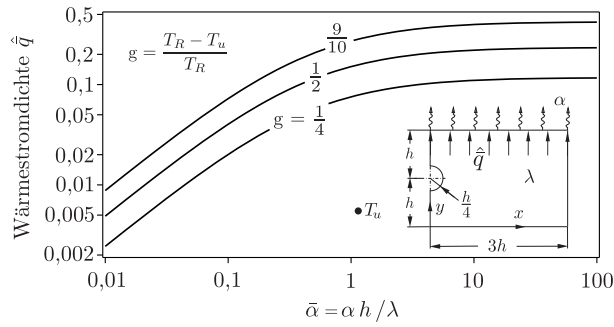
$$\bar{Q} = \frac{Q}{\lambda h T_R} \quad ; \quad \bar{q} = \frac{q h}{\lambda T_R} \quad (1618)$$

Im stationären Fall wird die durch das Rohr in den Fußboden einfließende Wärme gleichzeitig über die Oberfläche abgegeben:

$$Q_g = \hat{q} A = \hat{q} 3 h t \quad (1619)$$

$\hat{q}$  ist die mittlere Wärmestromdichte. Einsetzen von (1618) in (1619) führt zu:

$$\hat{q} = \frac{\bar{Q}_g h}{3 t} = \frac{\bar{Q}_g}{3 \bar{t}} \quad (1620)$$



**Bild A.94.** Dimensionslose mittlere Wärmestromdichte  $\hat{q}$

Aus der Rechnung mit FEM\_CAS erhält man:

$$\hat{q} = \frac{g}{3} \frac{45, 1\bar{\alpha}^5 + 868, 1\bar{\alpha}^4 + 5427\bar{\alpha}^3 + 12510\bar{\alpha}^2 + 8430\bar{\alpha}}{32, 1\bar{\alpha}^5 + 639, 1\bar{\alpha}^4 + \bar{\alpha}^3 + 11302\bar{\alpha}^2 + 11119\bar{\alpha} + 4261} + \frac{1}{3} \frac{13, 6\bar{\alpha}^5 + 258, 5\bar{\alpha}^4 + 1853\bar{\alpha}^3 + 3986\bar{\alpha}^2 + 4268\bar{\alpha} + 954, 5}{(32, 1\bar{\alpha}^5 + 639, 1\bar{\alpha}^4 + 4261\bar{\alpha}^3 + 11302\bar{\alpha}^2 + 11119\bar{\alpha} + 2810) \cdot 10^8} \quad (1621)$$

Die Beziehung (1621) beschreibt den Zusammenhang  $\hat{q} = \hat{q}(\bar{\alpha}, g)$ . In Bild A.94 ist (1621) grafisch ausgewertet. Als Parameter tritt  $g = (T_R - T_u)/T_R$  auf. Mit kleiner werdendem  $g$  nimmt die Wärmestromdichte  $\hat{q}$  ab, da diese linear von der Temperaturdifferenz  $T_R - T_u$  abhängt. Mit einem Wert  $\bar{\alpha} > 1$  läßt sich  $\hat{q}$  kaum noch steigern.

➤ **A.12.10 Wärmeübertragungsbeispiel X**

⊗ **Analytische Lösung der Temperaturverteilung**

Die Temperaturverteilung im Querschnitt des Rohres ist achsensymmetrisch und hängt nur vom Radius  $r$  ab, wie die analytische Lösung zeigt:

$$T = T_i + (T_a - T_i) \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \quad (1622)$$

Mit  $g = T_a/T_i$  und  $f = r_a/r_i$  ergibt sich die bezogene Temperatur  $\bar{T}$ :

$$\bar{T} = \frac{T}{T_i} = 1 + \frac{(g-1)}{\ln(f)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) \quad (1623)$$

⊗ **Temperaturverteilung entlang der  $x$ -Achse**

Infolge der Achsensymmetrie des Problems wird nur ein Segment des Rohres betrachtet, wie es in Bild 12.19 auf der S. 410 dargestellt ist. Der Öffnungswinkel  $2\varphi$  ist beliebig. Das Segment ist in 12 Dreieckselemente eingeteilt. Es wird die Temperaturverteilung entlang der  $x$ -Achse betrachtet. Bedingt durch die Kenntnis der Temperaturen auf dem inneren und äußeren Rand gilt:  $T_2 = T_i$ ;  $T_{11} = T_a$ . Die bezogenen Temperaturen an den Knoten 5 und 8 lauten:

$$\begin{aligned} \bar{T}_5 &= \frac{T_5}{T_i} = \frac{1}{\psi} [144 + 13g + (160 + 46g)f + (16 + 21g)f^2] \\ \bar{T}_8 &= \frac{T_8}{T_i} = \frac{1}{\psi} [117 + 40g + (76 + 130g)f + (7 + 30g)f^2] \end{aligned} \quad (1624)$$

mit  $\psi = 157 + 206f + 37f^2$ ;  $g = \frac{T_a}{T_i}$ ;  $f = \frac{r_a}{r_i}$

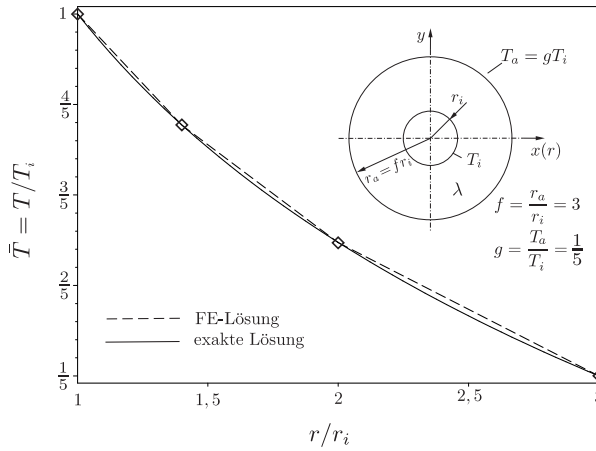
Die Verteilung der Temperatur im Dreieckselement läßt sich nach (979) auf der S. 394 schreiben als:

$$T = L_1 T_1 + L_2 T_2 + L_3 T_3 \quad (1625)$$

Betrachtet man nun die erste Kante des Dreiecks (s. Bild 2.7 auf der S. 39), so gilt:  $L_3 = 0$ . Mit  $L_1 + L_2 + L_3 = 0$  erhält man:

$$T = L_1 T_1 + L_2 T_2 = L_1 T_1 - L_1 T_2 = L_1 (T_1 - T_2) \quad (1626)$$

Die Temperatur verläuft also linear auf der Kante des Dreieckselementes. Damit stellt sich, wie in Bild A.95 dargestellt, der Temperaturverlauf entlang der  $x$ -Achse als Polygonzug dar. Die Temperaturen an den Knoten, die durch eine Raute gekennzeichnet sind, entsprechen denen der analytischen Lösung. Dazwischen verläuft sie linear, so daß eine Abweichung von der exakten Lösung auftritt.



**Bild A.95.** Temperaturverlauf über die Dicke des Rohres für die exakte und die FE-Lösung

### ⊗ Wärmeflüsse

Der Wärmefluss  $Q$  durch das betrachtete Segment ist die Summe der Wärmeflüsse an den Knoten 1, 2 und 3:

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\lambda t (T_i - T_a)} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \frac{117 + 427f + 235f^2 + 21f^3}{\psi(f-1)} \quad (1627)$$

$n = \pi/\varphi$  ist die Anzahl Segmente die notwendig sind, um den ganzen Rohrquerschnitt zu beschreiben. Den gesamten Wärmefluß durch das Rohr gewinnt man durch Betrachtung des folgenden Grenzwertes:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_g &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \frac{117 + 427f + 235f^2 + 21f^3}{\psi(f-1)} \\ &= \pi \frac{117 + 427f + 235f^2 + 21f^3}{\psi(f-1)} \end{aligned} \quad (1628)$$

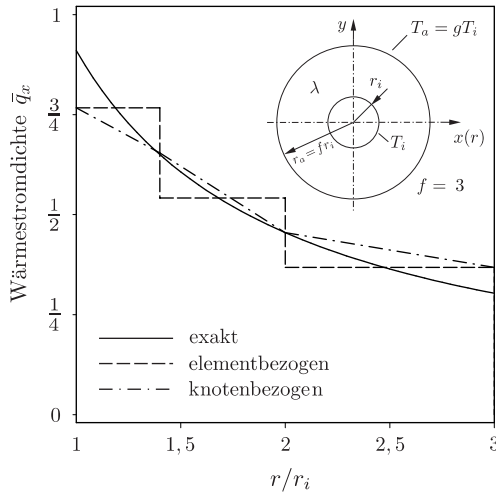
In Bild (A.96) sind die Strecken  $x_{ij} = x_i - x_j$  und  $y_{ij} = y_i - y_j$  des Dreieckselementes dargestellt. Die Wärmestromdichte nach (1632) hängt nicht von  $x$



oder  $y$  ab. Sie ist im dreiknotigen Element konstant. Dies führt zu Unstetigkeiten von Element zu Element. Betrachtet man nun die Wärmestromdichte entlang der  $x$ -Achse, so werden dazu die Elemente 3, 7 und 11 herangezogen. Für diese Elemente ergeben sich folgende, bezogenen Wärmestromdichten:

$$i_{\bar{q}_x} = \frac{q_x r_i}{\lambda T_i (1 - g)} = \begin{cases} 5 (13 + 46f + 21f^2) / [\psi(f - 1)] & \text{für } i = 3 \\ 10 (9 + 28f + 3f^2) / [\psi(f - 1)] & \text{für } i = 7 \\ 2 (117 + 76f + 7f^2) / [\psi(f - 1)] & \text{für } i = 11 \end{cases} \quad (1633)$$

In Bild A.97 ist für  $f = r_a/r_i = 3$  die exakte Wärmestromdichte über den Radius sowie die der FE-Lösung aufgeführt. Bedingt dadurch, daß die Wärmestromdichte im Element konstant ist, stellt sich die FE-Lösung treppenförmig dar. Eine arithmetische Mittelung der Wärmestromdichten an den Knoten führt zu einer stetigen Lösung. Dabei wird die Wärmestromdichte wie folgt an den Knoten berechnet:



**Bild A.97.** Gegenüberstellung der exakten Wärmestromdichte und der aus der FE-Rechnung

$$q_{xj} = \frac{1}{2} \sum_i q_x \quad (1634)$$

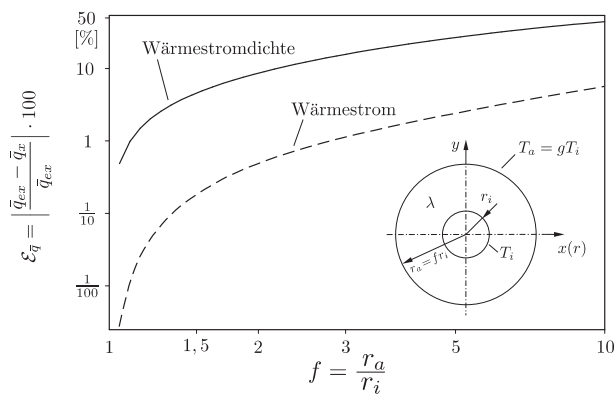
Am Knoten  $j$  wird die Wärmestromdichte gebildet, indem man über die beiden Elemente  $i$  summiert, die an den Knoten  $j$  angrenzen. Die strichpunktierte Kurve in Bild A.97 gibt diesen Verlauf wieder.

⊗ **Wärmestromdichte auf dem Innenrand des Rohres**

Der Wert für die bezogene Wärmestromdichte  $\bar{q}_x$  auf der Innenseite des Rohres entspricht  ${}^3\bar{q}_x$  aus (1633). Der Fehler an dieser Stelle lautet mit (1629):

$$\mathcal{E}_{\bar{q}} = \left| \frac{\bar{q}_{ex} - {}^3\bar{q}_x}{\bar{q}_{ex}} \right| 100 = 100 - \frac{(13 + 46f + 21f^2) \ln(f)}{\psi(f-1)} 500 \quad (1635)$$

In Bild (A.98) ist dieser Fehler sowie der für die Wärmeströme nach (1628) in einem doppelt logarithmischen System angeführt. Der Fehler in der Wärmestromdichte ist um eine Zehnerpotenz größer als der des Wärmestromes.



**Bild A.98.** Fehler in Wärmestromdichte und Wärmestrom

⊗ **A.12.11 Wärmeübertragungsbeispiel XI**

Das Rohr soll eine Länge  $t$  besitzen, mit  $t \rightarrow \infty$ . Damit spielt der Wärmeübergang an den Stirnseiten keine Rolle und die Aufgabe kann als ebenes Problem betrachtet werden. Das Problem ist zyklisch symmetrisch, so daß nur ein Segment mit einem Öffnungswinkel von  $22,5^\circ$  betrachtet werden muß. Dieses ist in Bild 12.20 auf der S. 411 schraffiert dargestellt und in acht dreiknotige Dreieckselemente eingeteilt (s. Bild A.99).

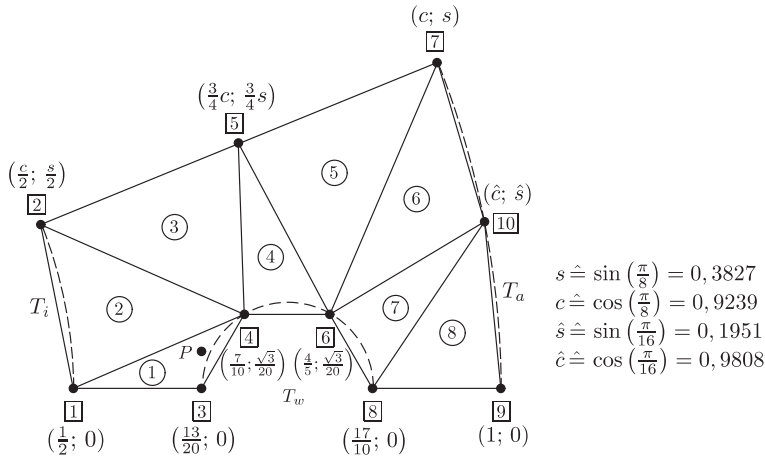
Den Knoten 1 und 2 wird eine Temperatur  $T_i$  und den Knoten 7, 9 und 10 eine Temperatur  $T_a$  aufgeprägt. Den Elementkanten, die auf dem Halbkreis liegen, wird eine Wärmestromdichte  $q$  zugeordnet.

⊗ **Temperaturen an den Knoten**

Die Rechnung mit „FEM\_CAS“ führt auf Temperaturen wie sie in der Tab. A.19 auf der S. 196 aufgeführt sind.

Die Temperatur am Knoten 3 lautet damit:

$$T_3 = 0,7100 T_i + 0,2900 T_a + 0,1003 \frac{q}{\lambda} R \quad (1636)$$



**Bild A.99.** Das FE-Netz eines Segmentes des Rohres und die Koordinaten der Knoten, die jeweils noch mit  $R$  zu multiplizieren sind. Die gestrichelten Linien beschreiben die reale Geometrie. Sie wird im Netz durch Polygonzüge angenähert

Diese Temperatur ist proportional zu den Temperaturen an der Innenwand  $T_i$ , der Außenwand  $T_a$  und dem Radius  $R$  des Rohres.

② **Temperatur im Punkt  $P$**

Über die Formfunktionen (979) auf der S. 394 läßt sich die Temperatur  $T$  an jeder Stelle eines Elementes berechnen. Geht man von einem Punkt  $(x, y)$  aus, so muß dieser zunächst in Dreieckskoordinaten des entsprechenden Elementes umgerechnet werden. Gegeben ist dazu der Punkt  $P$  mit  $\vec{x}^T = \begin{bmatrix} 13/20 R & \sqrt{3}/40 R \end{bmatrix}$ . Dieser liegt im Element 1 (s. Bild A.99). Aus (77) auf der S. 40 erhält man:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{13}{20} R \\ \frac{\sqrt{3}}{40} R \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} R & \frac{13}{20} R & \frac{7}{10} R \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{20} R \end{bmatrix}}_{\underline{C}} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (1637)$$

Durch Inversion von  $\underline{C}$  erhält man die gesuchten Dreieckskoordinaten  $L_1$ ,  $L_2$  und  $L_3$  des gegebenen Punktes  $\vec{P}^T = \begin{bmatrix} x_P & y_P \end{bmatrix}$ :

**Tabelle A.19.** Temperaturen an den Knoten

Knoten	Temperatur
1	$T_i$
2	$T_i$
3	$0,7100 T_i + 0,2900 T_a + 0,1003 \frac{q}{\lambda} R$
4	$0,5408 T_i + 0,4592 T_a + 0,1156 \frac{q}{\lambda} R$
5	$0,4154 T_i + 0,5846 T_a + 0,0732 \frac{q}{\lambda} R$
6	$0,2810 T_i + 0,7190 T_a + 0,1061 \frac{q}{\lambda} R$
7	$T_a$
8	$0,1745 T_i + 0,8255 T_a + 0,0951 \frac{q}{\lambda} R$
9	$T_a$
10	$T_a$

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} \frac{13}{3} & -\frac{20}{3R} & \frac{20\sqrt{3}}{9R} \\ -\frac{10}{3} & \frac{20}{3R} & \frac{80\sqrt{3}}{9R} \\ 0 & 0 & \frac{20\sqrt{3}}{3R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{13}{20} R \\ \frac{\sqrt{3}}{40} R \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (1638)$$

Über die Formfunktionen erhält man damit die gesuchte Temperatur:

$$\begin{aligned} T &= \left[ \frac{1}{6} \mid \frac{1}{3} \mid \frac{1}{2} \right] \begin{bmatrix} T_i \\ 0,7100 T_i + 0,2900 T_a + 0,1003 \frac{qR}{\lambda} \\ 0,5408 T_i + 0,4592 T_a + 0,1156 \frac{qR}{\lambda} \end{bmatrix} \\ &= 0,6737 T_i + 0,3263 T_a + 0,0912 \frac{q}{\lambda} R \end{aligned} \quad (1639)$$

⊗ **Temperatur  $T = 1/2 (T_i + T_a)$  im Knoten 3**

Es soll sich am Knoten 3 die Temperatur  $T_3 = 1/2(T_i + T_a)$  einstellen:

$$T_3 = 0,7100 T_i + 0,2900 T_a + 0,1003 \frac{q}{\lambda} R \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}(T_i + T_a) \quad (1640)$$

Daraus ergibt sich eine erforderliche Wärmestromdichte  $\tilde{q}$  zu:

$$\tilde{q} = -2,0937(T_i - T_a) \frac{\lambda}{R} \quad (1641)$$

Die erforderliche Wärmestromdichte wird größer, wenn die Temperaturdifferenz zwischen innen und außen größer wird. Ebenso bei größerer Wärmeleitfähigkeit. Bei größerem Radius  $R$  hingegen wird die Wärmestromdichte kleiner.

⊗ **Abführen des halben Wärmestromes über die Kühlbohrung**

Die Hälfte des Wärmestromes, der in das Rohr eintritt, soll über die Kühlbohrungen abgeführt werden. Die Wärmemenge  $Q_k$ , die auf dem Rand der Kühlbohrung des Segmentes auftritt, lautet:

$$Q_k = q \pi t \frac{R}{10} \quad (1642)$$

Die Wärmemenge  $Q_g$ , die auf der Innenseite eintritt, ergibt sich aus den Wärmeflüssen an den Knoten 1 und 2:

$$Q_g = Q_1 + Q_2 = -0,4999(T_i - T_a) t \lambda + 0,1264 q t R \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} q \frac{R}{10} \pi t \quad (1643)$$

Daraus ergibt sich die notwendige Wärmestromdichte  $\hat{q}$ :

$$\hat{q} = -16,2942(T_i - T_a) \frac{\lambda}{R} \quad (1644)$$

➤ **A.12.12 Hydrostatisches Lager als Beispiel zur Strömungsanalogie**

420

⊗ **Analytische Lösung des Druckverlaufes im Lager**

Der exakte Verlauf der Temperatur lautet nach (1622) auf der S. 190:

$$T = T_i + \frac{T_a - T_i}{\ln(f)} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) \quad (1645)$$

Mit den analogen Größen  $T_i \hat{=} p_i$  und  $T_a \hat{=} p_a = 0$  erhält man aus (1645) die Druckverteilung im Lager zu:

$$\bar{p} = \frac{p}{p_i} = 1 - \frac{\ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{\ln(f)} = \frac{\ln\left(\frac{r_a}{r}\right)}{\ln(f)} \quad (1646)$$

⊗ **Drücke an den Knoten**

Aus der analogen Wärmeübertragungsrechnung ergeben sich nach (1624) auf der S. 190 mit  $g = p_a/p_i = 0$  und  $\psi = 157 + 206f + 37f^2$  die Drücke an den Knoten 5 und 8:

$$\begin{aligned}\bar{p}_5 &= \frac{p_5}{p_i} = \frac{16}{\psi}(9 + 10f + f^2) \\ \bar{p}_8 &= \frac{p_8}{p_i} = \frac{1}{\psi}(117 + 76f + 7f^2)\end{aligned}\quad (1647)$$

Der Druckverlauf stellt sich in gleicher Weise wie die Temperaturverteilung in Bild A.95 auf der S. 191 dar. Der Unterschied liegt darin, daß der normierte Druck  $\bar{p}$  bei  $r = r_a$  den Wert Null annimmt.

⊗ **Volumenstrom des Lagers**

Die analoge Größe zum Volumenstrom  $\dot{V}$  des Lagers ist der Wärmefluß  $Q$ . Mit den Entsprechungen  $\lambda \hat{=} t^2/(12\eta)$ ,  $T_i \hat{=} p_i$  und  $T_a \hat{=} p_a = 0$  erhält man aus (1627):

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\lambda t (T_i - T_a)} \hat{=} \frac{6\eta \dot{V}}{p_i \pi t^3} 2\pi = \bar{\dot{V}} 2\pi \quad (1648)$$

Damit kann man den gesamten, bezogenen Volumenstrom des Lagers  $\bar{\dot{V}}_g$  analog zu  $\bar{Q}_g$  nach (1628) beschreiben als:

$$\bar{\dot{V}}_g = \frac{117 + 427f + 235f^2 + 21f^3}{2\psi(f-1)} \quad (1649)$$

Der exakte Volumenstrom lautet:

$$\dot{V}_{ex} = \frac{p_i \pi t^3}{6\eta} \frac{1}{\ln(f)} \Rightarrow \bar{\dot{V}}_{ex} = \frac{1}{\ln(f)} \quad (1650)$$

Für  $|\bar{\dot{V}}_g - \bar{\dot{V}}_{ex}|/\bar{\dot{V}}_{ex} \cdot 100$  ergibt sich bei  $f \leq 10$  ein maximaler Fehler kleiner 6 %.

⊗ **Exakte, mittlere Geschwindigkeit in radialer Richtung**

In die Geschwindigkeit  $\dot{u}$  nach (1048) auf der S. 419 wird der Gradient des Druckes nach (1646) eingesetzt und es ergibt sich:

$$\dot{u} = \frac{p_i}{r \ln(f)} \frac{z^2}{2\eta} \left[ 1 - \left( \frac{t}{2z} \right)^2 \right] \quad (1651)$$

Die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  stellt sich dar als:

$$\bar{u} = \frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} \dot{u} dz = \frac{t^2}{12 \eta r \ln(f)} p_i \quad (1652)$$

⊗ **Mittlere Strömungsgeschwindigkeit in Abhängigkeit vom Radius**

Die analoge Beziehung zur Fourier'schen Gleichung  $\vec{q} = -\lambda \nabla T$  ist der Ausdruck für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit:  $\bar{u} = -t^2/(12\eta) \nabla p$ . Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit entlang der  $x$ -Achse  $\bar{u}$  ist elementorientiert. Betrachtet man dazu die analoge Beziehung nach (1633), so ergibt sich mit  $\bar{u} \hat{=} q_x$ ,  $\lambda \hat{=} t^2/(12\eta)$ ,  $T_i \hat{=} p_i$  und  $T_a \hat{=} p_a = 0$ :

$${}^i \hat{u} = 12 \frac{r_i \eta}{t^2 p_i} \bar{u} = \begin{cases} 5(13 + 46f + 21f^2)/[\psi(f-1)] & \text{für } i = 3 \\ 5(18 + 56f + 6f^2)/[\psi(f-1)] & \text{für } i = 7 \\ (234 + 152f + 14f^2)/[\psi(f-1)] & \text{für } i = 11 \end{cases} \quad (1653)$$

Die mittlere dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit  $\hat{u}$  ist also unstetig von Element zu Element.

⊗ **Exakte Traglast**

Die exakte Traglast  $F_{ex}$  setzt sich zusammen aus dem Anteil aus der Tasche mit  $p = p_i$  und dem Anteil der Abströmfläche mit  $p = p(r)$ :

$$F_{ex} = p_i \pi \left( \frac{r_a}{f} \right)^2 + \int_{r_i}^{r_a} p(r) 2\pi r dr \quad (1654)$$

Mit der Beziehung für den Druck  $p(r) = p_i \ln(r_a/r) / \ln(f)$  ergibt sich:

$$F_{ex} = p_i \pi \left( \frac{r_a}{f} \right)^2 + p_i \frac{2\pi}{\ln(f)} \int_{r_i}^{r_a} r \ln \left( \frac{r_a}{r} \right) dr = \frac{\pi}{2} \frac{r_a^2 (f^2 - 1)}{f^2 \ln(f)} p_i \quad (1655)$$

Bezieht man (1655) auf  $p_i \pi r_a^2$ , so erhält man die normierte Traglast  $\bar{F}_{ex}$ :

$$\bar{F}_{ex} = \frac{1}{2} \frac{f^2 - 1}{f^2 \ln(f)} \quad (1656)$$

⊗ **Traglast aus der FE-Rechnung**

Die vom betrachteten Segment aufnehmbare Axialkraft  $\hat{F}$  stellt sich dar als:

$$\hat{F} = \int_A p \, dA = \sum_e \int_{eA} {}^e p \, dA \quad (1657)$$

Die Kraft  $\hat{F}$  wird gewonnen, indem über jedes Element  $e$  des Segmentes integriert wird und die Kraft des Elementes  ${}^e \hat{F}$  auf die Kraft  $\hat{F}$  aufsummiert wird. Die Druckverteilung im Element  $e$  läßt sich über Dreieckskoordinaten beschreiben:

$${}^e p = \left[ \begin{array}{c|c|c} L_1 & L_2 & L_3 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{array} \right] = \vec{N}^T {}^e \vec{p} \quad (1658)$$

Damit ergibt sich für das Element  $e$ :

$${}^e \hat{F} = \int_{eA} {}^e p \, dA = p_1 \int_{eA} L_1 \, dA + p_2 \int_{eA} L_2 \, dA + p_3 \int_{eA} L_3 \, dA \quad (1659)$$

Mit der Vorschrift (98) auf der S. 44 für die Integration in Dreieckskoordinaten folgt aus (1659):

$${}^e \hat{F} = \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3)A_\Delta; \quad A_\Delta = \frac{1}{2}(x_{21} y_{31} - y_{21} x_{31}) \quad (1660)$$

Die Kraft eines Elementes  ${}^e \hat{F}$  ergibt sich also aus dem arithmetischen Mittelwert der Drücke an den drei Knoten des Elementes multipliziert mit der Fläche des Dreieckselementes.

Die Summation über die 12 Elemente des Problems führt auf:

$$\hat{F} = \frac{1}{15} \frac{-1876 - 1095f + 1901f^2 + 987f^3 + 83f^4}{\psi f^2} p_i r_a^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (1661)$$

Die Traglast  $\hat{F}$  ist unabhängig von der Viskosität  $\eta$  und der Spalthöhe  $t$ . Die Grenzwertbetrachtung  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \hat{F})$  führt mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \sin(\pi/n)) = \pi$  auf:

$$\bar{F} = \frac{\hat{F}}{p_i \pi r_a^2} = \frac{1}{15} \frac{-1876 - 1095f + 1901f^2 + 987f^3 + 83f^4}{\psi f^2} \quad (1662)$$

Die bezogene Traglast aus der Tasche des Lagers lautet:



$$\bar{F}_i = \frac{1}{f^2} \quad (1663)$$

Damit ergibt sich die Gesamtlast  $\bar{F}_g = \bar{F} + \bar{F}_i$  zu:

$$\bar{F}_g = \frac{1}{15} \frac{479 + 1995f + 2456f^2 + 987f^3 + 83f^4}{\psi f^2} \quad (1664)$$

Bei einem Wert von  $f = 3$  tritt ein Fehler von 2,4 % in der Traglast auf.



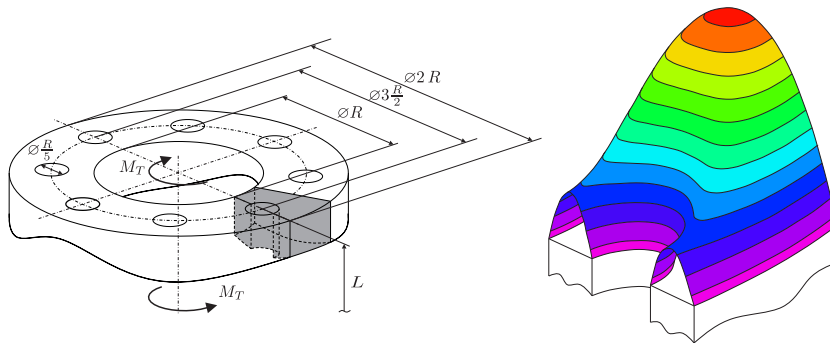
## A.13 Torsionsbeispiele

A.13

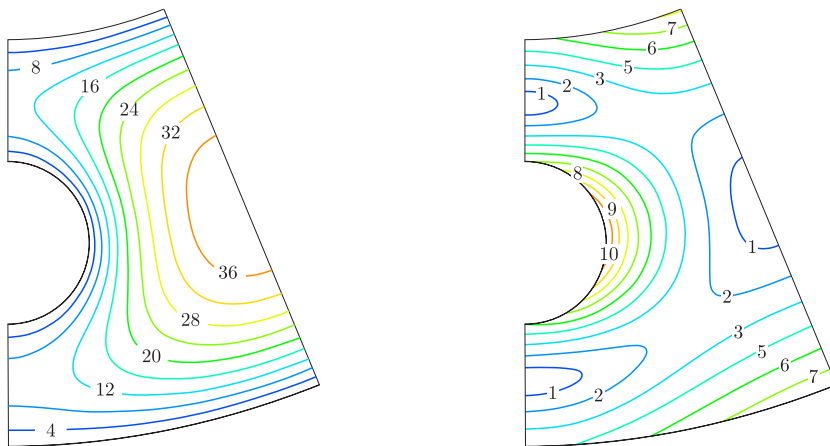
### ➤ A.13.1 Torsion eines Rohres mit Längsbohrungen

In der linken Hälfte von Bild A.100 ist ein Torsionsstab der Länge  $L$  dargestellt. Es ist ein dickwandiges Rohr, das in der Rohrwandung Längsbohrungen aufweist. Der Torsionsstab wird durch zwei gegenläufige Torsionsmomente belastet. In der rechten Bildhälfte sind die Spannungsfunktionswerte dargestellt. Sie sind normal zur Querschnittsfläche aufgetragen.

434



**Bild A.100.** Die Geometrie des Torsionsstabes und die Darstellung der Spannungsfunktion ( $R=50$ ,  $L=1000$ )

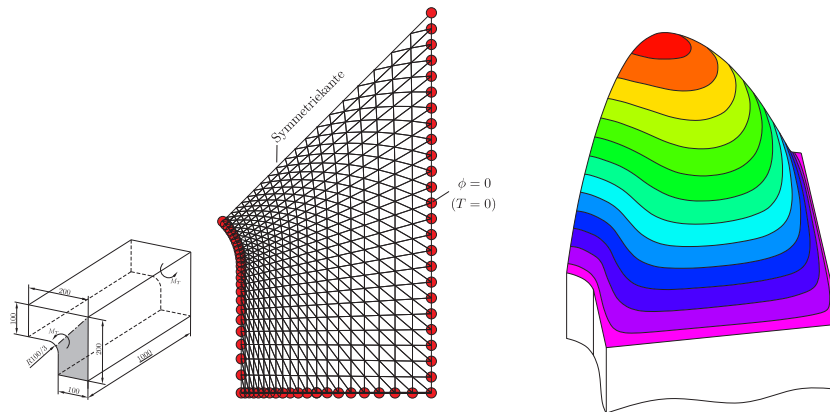


**Bild A.101.** Verteilung der Spannungsfunktionswerte und Schubspannungen in Form von Isolinien

Die linke Hälfte in Bild A.101 zeigt die Verteilung der Spannungsfunktion in Form von Isolinien. Die rechte Bildhälfte beschreibt die Schubspannungen  $|\vec{\tau}|$ . Die maximale Schubspannung tritt auf den Innenrand der kleinen Bohrung auf.

➤ **A.13.2 Torsion eines Winkels bzw. Temperaturverlauf in einem Winkel**

In diesem Beispiel wird die Torsion eines Winkels und die Temperaturverteilung in dem Querschnitt eines Winkels gleichzeitig berechnet (s. Tab. 12.3 auf der S. 413). In den Klammern sind jeweils die analogen Größen des Wärmeübertragungsproblems angeführt.



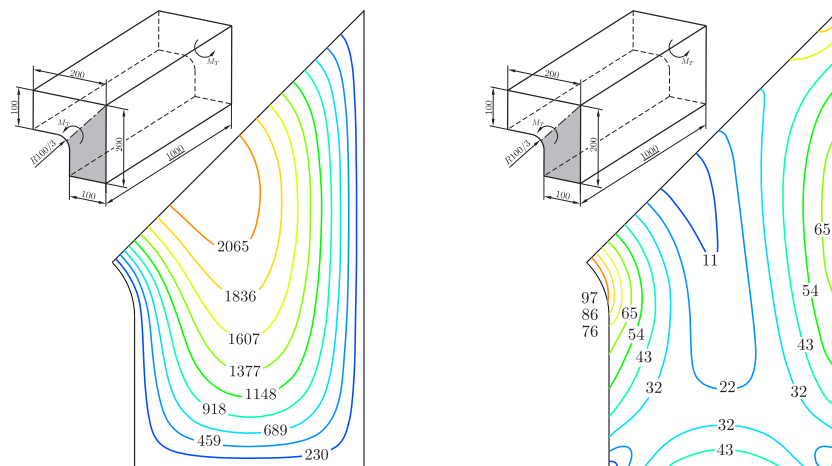
**Bild A.102.** Die Geometrie eines Winkels und das FE-Netz des halben Querschnittes des Winkels und die Spannungsfunktionswerte

Das Bild A.102 zeigt in der linken Hälfte einen dickwandigen, prismatischen Winkel, der durch zwei gegenläufige Torsionsmomente  $M_T$  belastet bzw. durch einen Drillwinkel  $\Theta$  tordiert wird. Beim analogen Wärmeproblem wird die Belastung über eine Wärmequellendichte  $\Phi$  (s. (1007) auf der S. 402) beschrieben. Das Problem ist einfach symmetrisch, so daß nur eine Hälfte der Querschnittsfläche vernetzt wird. In der Mitte des Bildes ist das Netz angeführt, das aus dreiknotigen Dreieckselementen besteht. Dort wo hohe Spannungsfunktionsgradienten (Temperaturgradienten) zu erwarten sind, nämlich auf der inneren Ausrundung, ist der Querschnitt feiner vernetzt. Die Spannungsfunktionswerte (Temperaturen) auf dem Rand des Winkels haben den Wert Null (s. rot eingefärbte Knoten).

Das Torsionsmoment kann nicht unmittelbar aufgebracht werden, sondern es wird der Winkel der Verdrillung  $\Theta$  vorgegeben. Mit  $\Theta=1/2^\circ$  und einer Länge des Stabes von  $L=1000$  mm sowie einem Schubmodul  $G=210000/(2(1+0,3))$  ergibt sich die Größe  $\Phi=2 G \Theta$  zu 1,40969. Es sind die Spannungsfunktionswerte (Temperaturen) an den Knoten die Unbekannten. Die rechte Bildhälfte stellt die Spannungsfunktionswerte als Fläche dar.

In der linken Hälfte von Bild A.103 sind die Spannungsfunktionswerte als Isolinien dargestellt. Auf dem Rand nehmen sie den Wert Null an und weisen in der Mitte ihr Maximum auf. Aus diesen Spannungsfunktionswerten (Temperaturen) werden nach (1029) auf der S. 413 die Schubspannungen  $\vec{\tau}$

berechnet. Beim Wärmeproblem erhält man nach (938) auf der S. 377 die Wärmestromdichten  $\vec{q}$ , wobei in diesem Fall gilt:  $\lambda_x = \lambda_y = 1$ .  $|\vec{\tau}|$  ( $|\vec{q}|$ ) sind in Form von Isolinien in der rechten Hälfte von Bild A.103 angeführt. Die maximale Schubspannung  $|\vec{\tau}|$  (Wärmestromdichte  $|\vec{q}|$ ) tritt in der Ausrundung des Winkels auf.



**Bild A.103.** Isolinien der Spannungsfunktionswerte und die Schubspannungen  $|\vec{\tau}|$  bei der Torsion eines Winkels

Finite-Elemente-Methode

Rechnergestützte Einführung

Steinke, P.

2015, XVI, 485 S. Mit Online-Extras., Softcover

ISBN: 978-3-642-53936-7